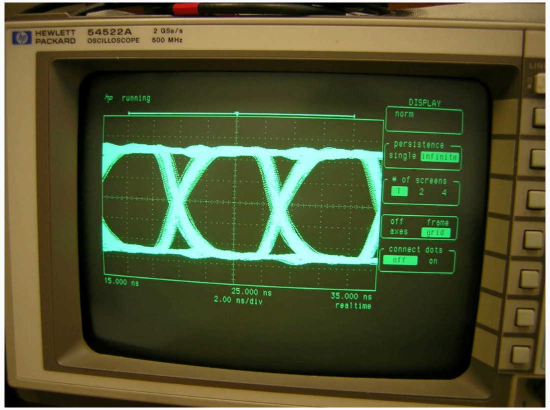
Sistemas de Comunicação

Densidade espectral de energia e de potência



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Sinais de energia

Energia de um sinal

A **energia** de um sinal $x(t)$ é definida por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Um sinal com $0 < E_x < \infty$ é chamado de **sinal de energia**.

A energia é uma medida da "intensidade" do sinal ao longo de todo o tempo.

Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Resposta:

(a) $E_x = A^2 T$.

(b) $E_x = \dfrac{c^2}{2a}$.

Teorema de Parseval

É possível calcular a energia de um sinal $x(t)$ no domínio da frequência:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \,\mathrm{d}f.$$

Esse resultado é conhecido como **teorema de Parseval**.

Demonstração do teorema de Parseval

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi t f} \, \mathrm{d}f \right]^* \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi t f} \, \mathrm{d}f \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi t f} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) \, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Densidade espectral de energia

A **densidade espectral de energia** de um sinal de energia $x(t)$ é definida por

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pelo teorema de Parseval. Assim:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) \, \mathrm{d}f.$$

Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Resposta:

(a) $\Psi_x(f) = A^2T^2\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$.

(b) $\Psi_x(f) = \dfrac{c^2}{a^2 + (2\pi f)^2}$.

Autocorrelação temporal de energia

A **autocorrelação temporal de energia** de um sinal de energia $x(t)$ é definida por

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t.$$

É uma medida da similaridade entre $x(t)$ e sua versão deslocada de τ.

Propriedades:

1. Se $x(t)$ é real, então $\psi_x(\tau)$ é real e par.
2. $\psi_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau)$.
   A autocorrelação temporal de energia é a convolução do sinal com sua versão refletida no tempo.
3. $E_x = \psi_x(0)$.

Exercício

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Exercício

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Resposta:

(a) $\psi_x(\tau) = A^2T\,\mathrm{tri}(\tau/T)$.

(b) $\psi_x(\tau) = \dfrac{c^2}{2a}e^{-a|\tau|}$.

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de energia determinísticos

A autocorrelação temporal de energia $\psi_x(\tau)$ e a densidade espectral de energia $\Psi_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$\Psi_x(f) = \mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\} &= \mathcal{F}\{x(\tau) \star x^*(-\tau)\} \\
&= \mathcal{F}\{x(\tau)\}\mathcal{F}\{x^*(-\tau)\} \\
&= X(f)X^*(f) \\
&= |X(f)|^2 \\
&= \Psi_x(f). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício

Verifique o teorema para os sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Referências

Referências

[1] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.