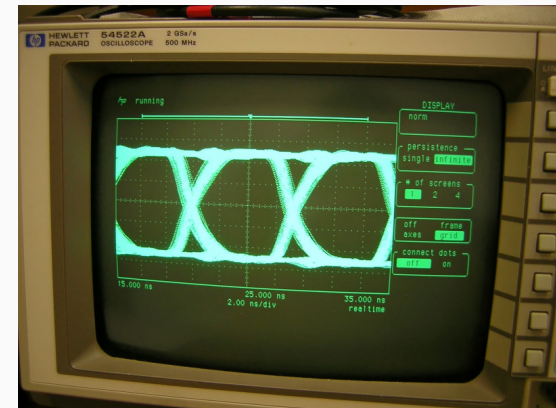


Sistemas de Comunicação

Amostragem e quantização

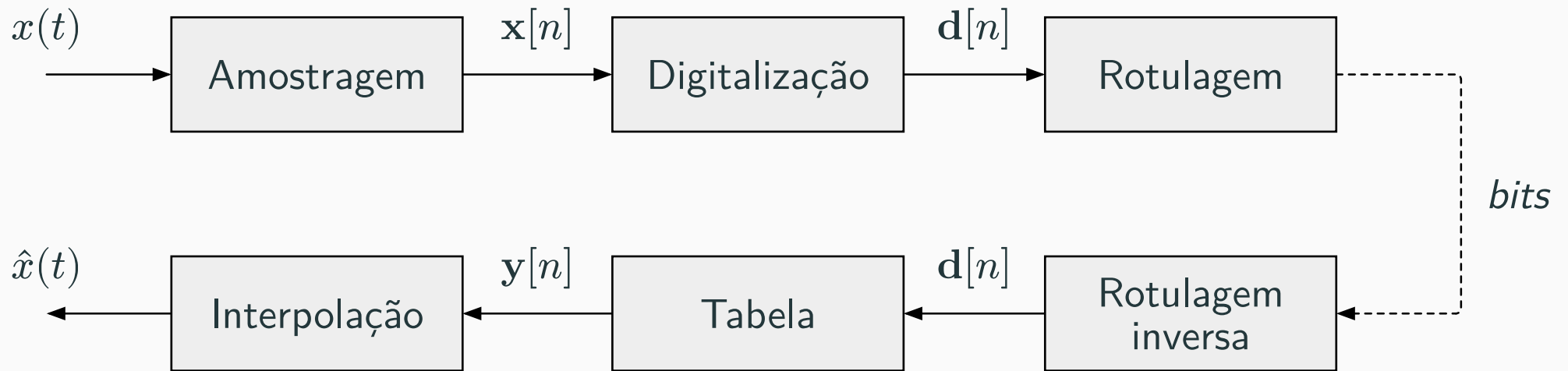


Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

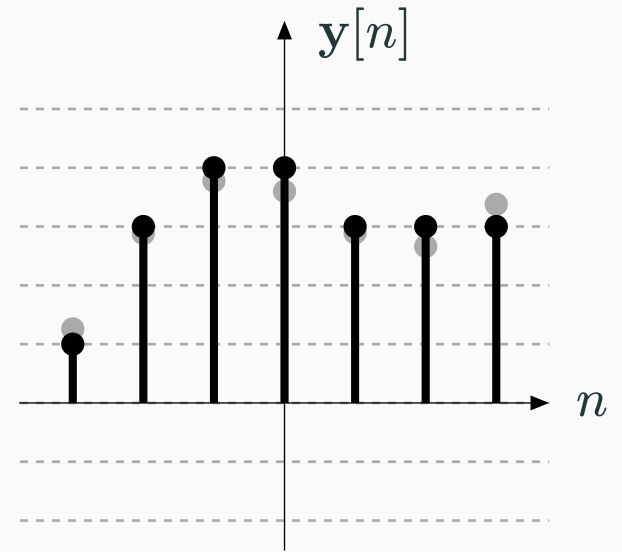
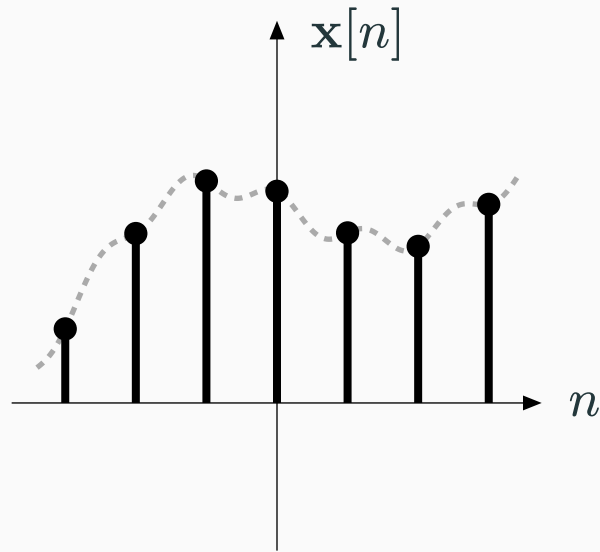
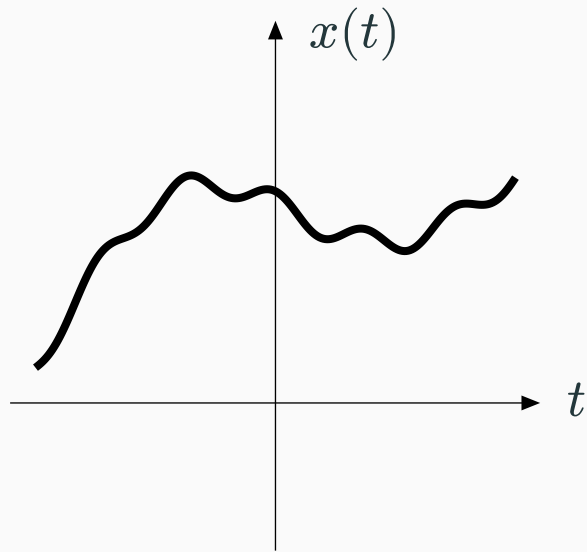
Instituto Federal de Santa Catarina

Introdução

Diagrama de blocos



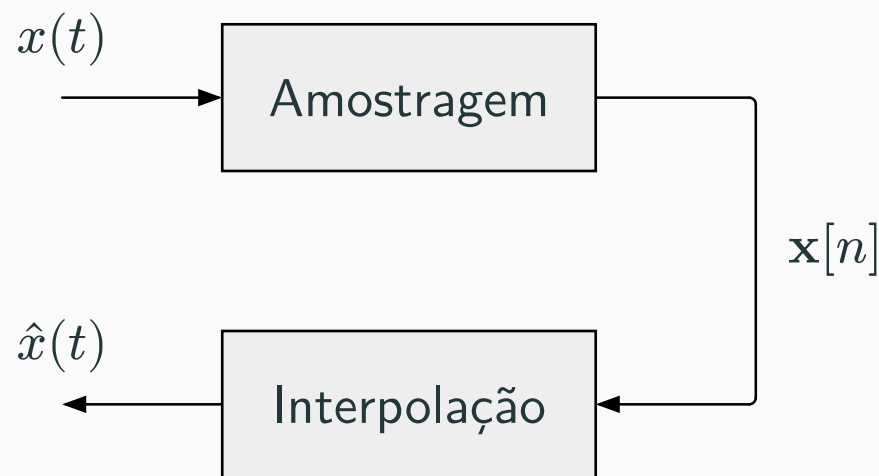
Sinais envolvidos



Amostragem

Modelo matemático da amostragem

Será considerada **amostragem uniforme**: $\mathbf{x}[n] = x(nT_a)$, para $n \in \mathbb{Z}$.



Sinais envolvidos:

- $x(t)$: sinal original.
- $\mathbf{x}[n]$: sequência de amostras.
- $\hat{x}(t)$: sinal reconstruído.

Parâmetros do sistema:

- T_a : intervalo de amostragem (s).
- f_a : taxa de amostragem (amostra/s).
- Relação: $f_a = 1/T_a$.

Exercício 1

Seja $x(t)$ uma onda triangular de amplitude 4 V, frequência fundamental de 10 Hz e pico ocorrendo em $t = 0$. Determine a saída de um amostrador com taxa de amostragem de $f_a = 80$ amostra/s.

Exercício 1

Seja $x(t)$ uma onda triangular de amplitude 4 V, frequência fundamental de 10 Hz e pico ocorrendo em $t = 0$. Determine a saída de um amostrador com taxa de amostragem de $f_a = 80$ amostra/s.

Resposta:

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x[n]$	...	-2	-4	-2	0	2	4	2	0	-2	-4	-2	...

Teorema da amostragem

Seja $x(t)$ um sinal real e $X(f)$ sua transformada de Fourier. Suponha que $X(f) = 0$ para $|f| \geq B_x$. Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir de suas amostras $\mathbf{x}[n]$ se

$$f_a > 2B_x.$$

Nesse caso,

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_a}{T_a}\right).$$

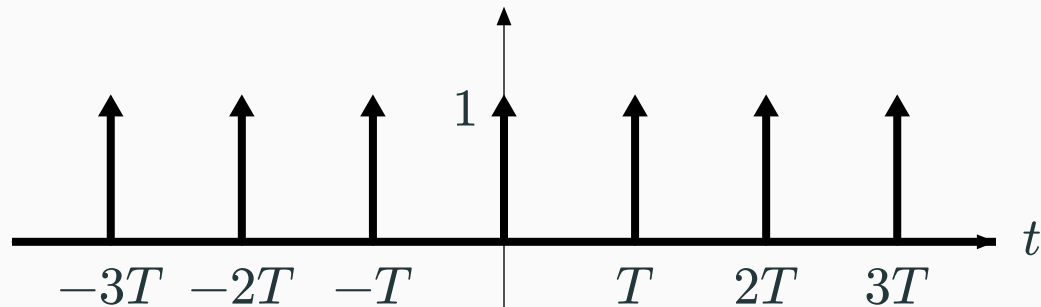
Observações:

- O termo $f_{\text{Nyq}} \stackrel{\text{def}}{=} 2B_x$ é chamado de *taxa de Nyquist* de $x(t)$.
- A fórmula acima é chamada de *fórmula de interpolação de Whittaker–Shannon*.
- O teorema foi descoberto e redescoberto várias vezes na história (cf. [Wikipedia](#)).

Parênteses: pente de Dirac

O **pente de Dirac**, também conhecido como *trem de impulsos*, é definido por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

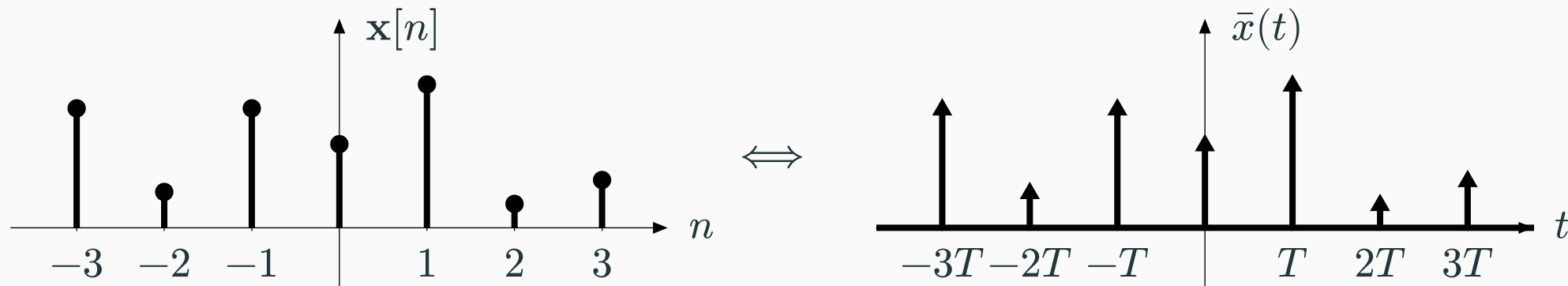


A transformada de Fourier de um pente no tempo é um pente na frequência!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Parênteses: pente de Dirac

O seguinte artifício matemático é bastante utilizado para representar uma sequência em tempo discreto como um sinal de tempo contínuo.



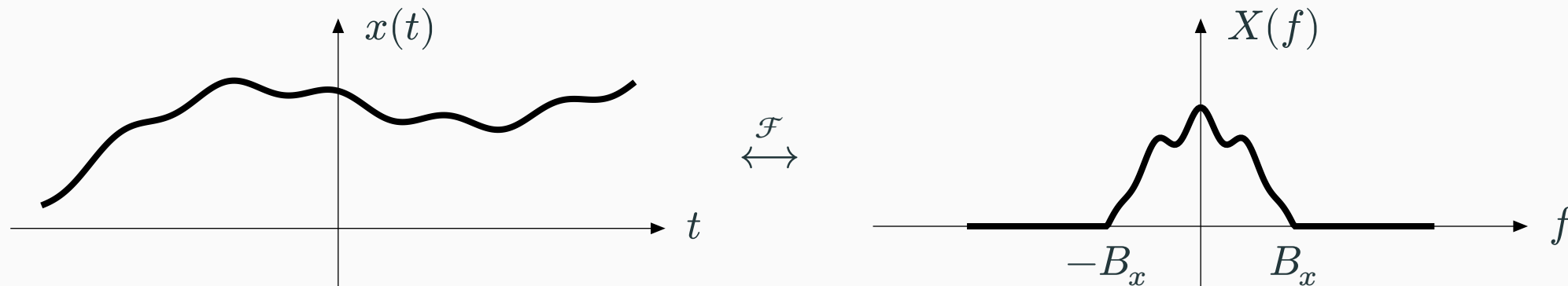
Note que $x[n]$ e $\bar{x}(t)$ são equivalentes em termos de informação.



$$\bar{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \delta(t - nT)$$

Demonstração do teorema da amostragem

Seja $x(t)$ um sinal e $X(f)$ sua transformada de Fourier. Assuma $X(f) = 0$ para $|f| \geq B_x$.



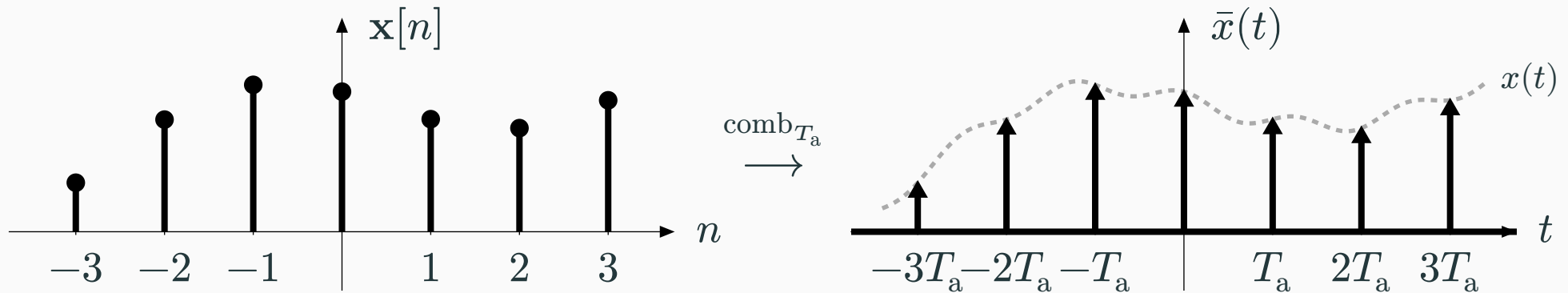
A ideia é seguir os seguintes passos para recuperar $x(t)$ a partir de $\mathbf{x}[n]$:

$$\mathbf{x}[n] \xrightarrow{\text{comb}_{T_a}} \bar{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{X}(f) \xrightarrow{\text{LPF}_{f_a/2}} X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t).$$

Demonstração do teorema da amostragem

Primeiro passo:

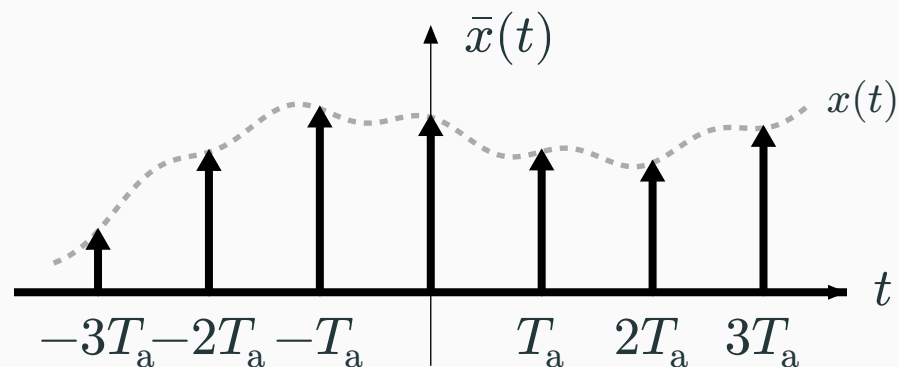
$$\bar{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}[n] \delta(t - nT) = x(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_a).$$



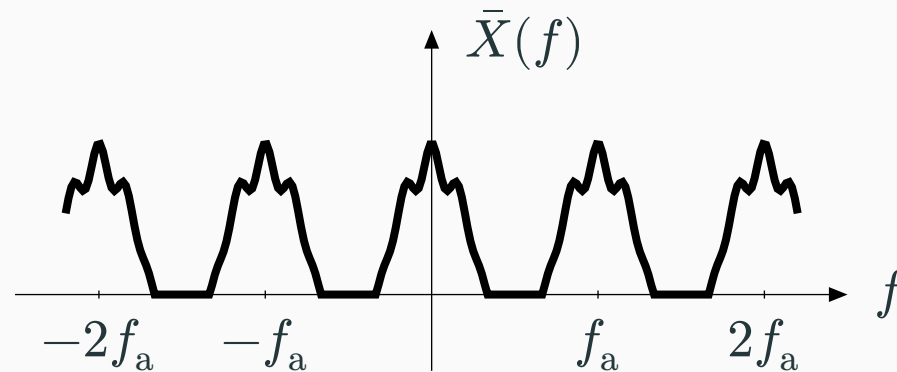
Demonstração do teorema da amostragem

Segundo passo:

$$\bar{X}(f) = X(f) \star \frac{1}{T_a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_a}\right) = f_a \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f - kf_a).$$



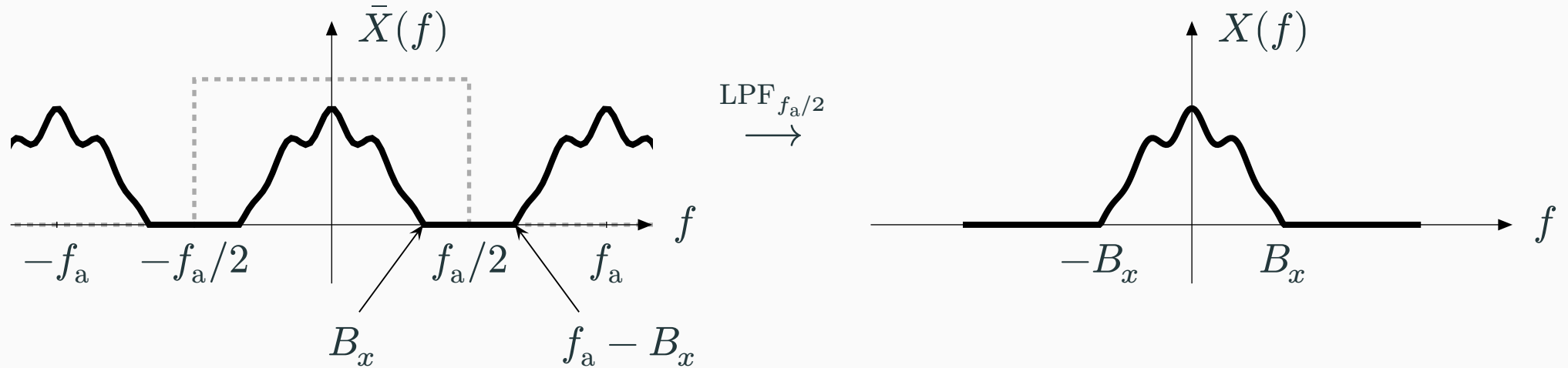
$\xrightarrow{\mathcal{F}}$



Demonstração do teorema da amostragem

Terceiro passo:

$$X(f) = \frac{1}{f_a} \text{rect}\left(\frac{f}{f_a}\right) \bar{X}(f) = T_a \text{rect}(T_a f) \bar{X}(f).$$

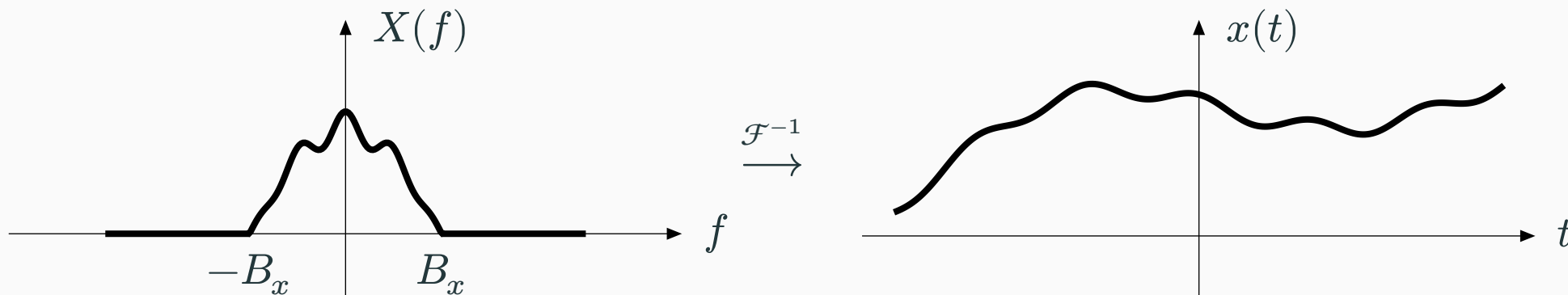


Se $\underbrace{B_x < f_a - B_x}_{f_a > 2B_x}$, então não haverá sobreposição espectral e $X(f)$ será recuperado.

Demonstração do teorema da amostragem

Quarto passo:

$$x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_a}\right) \star \bar{x}(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_a}\right) \star \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}[n] \delta(t - nT_a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}[n] \text{sinc}\left(\frac{t - nT_a}{T_a}\right).$$



Exercício 2

Seja $x(t) = 2 + 600 \operatorname{sinc}(200t) + 8 \cos(2\pi 50t)$. Determine o máximo intervalo de amostragem de modo que seja possível recuperar $x(t)$ a partir das amostras $x[n]$.

Exercício 2

Seja $x(t) = 2 + 600 \operatorname{sinc}(200t) + 8 \cos(2\pi 50t)$. Determine o máximo intervalo de amostragem de modo que seja possível recuperar $x(t)$ a partir das amostras $x[n]$.

Resposta:

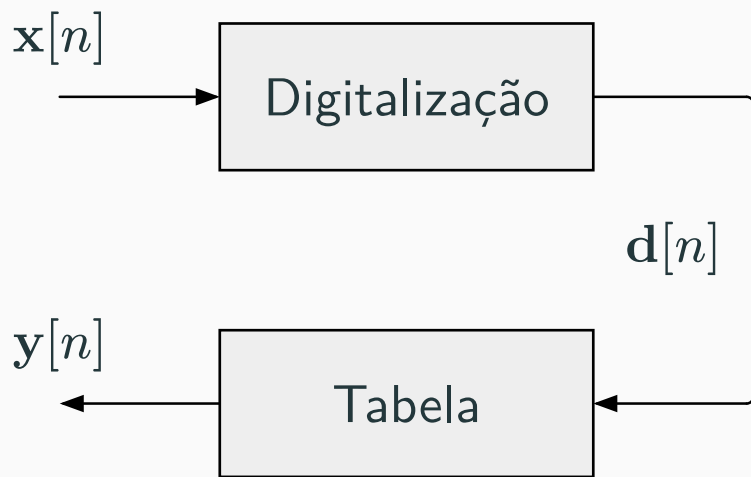
$$X(f) = 2\delta(f) + 4\delta(f + 50) + 4\delta(f - 50) + 3 \operatorname{rect}(f/200).$$

$$f_{\text{Nyq}} = 200 \text{ amostra/s.}$$

$$T_{\text{Nyq}} = 5 \text{ ms.}$$

Quantização

Será considerada **quantização escalar** (amostra por amostra).



Quantização $\stackrel{\text{def}}{=}$ operação $\mathbf{x}[n] \mapsto \mathbf{y}[n]$.

Sinais envolvidos:

- $\mathbf{x}[n]$: sequência original de amostras.
- $\mathbf{d}[n]$: sequência de índices.
- $\mathbf{y}[n]$: sequência de amostras quantizadas.

Parâmetros do sistema:

- L : número de níveis de quantização.
- $y_0, y_1, \dots, y_{L-1}$: níveis de quantização.
- $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_L$: limiares de quantização.

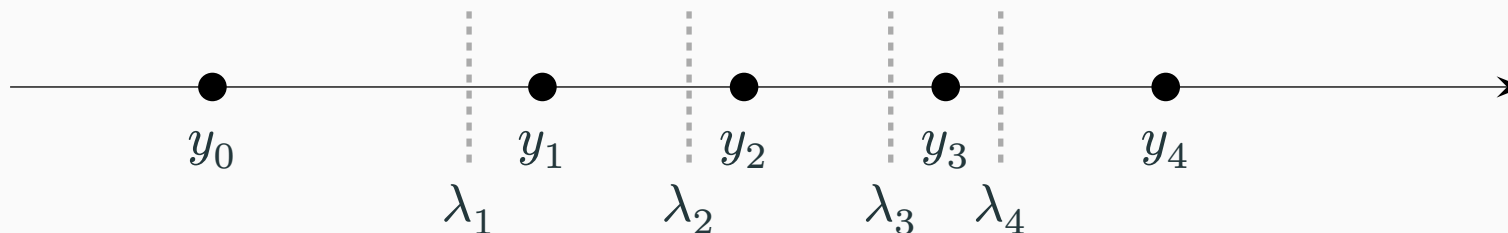
Simplificando a notação, escreveremos $\mathbf{x} = \mathbf{x}[n]$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}[n]$ e $\mathbf{y} = \mathbf{y}[n]$.

Modelo matemático

Os níveis e limiares devem respeitar

$$-\infty = \lambda_0 < y_0 < \lambda_1 < y_1 < \dots < \lambda_{L-1} < y_{L-1} < \lambda_L = \infty.$$

Exemplo com $L = 5$:



Regra de quantização: $\mathbf{x} \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}) \iff \mathbf{d} = i \iff \mathbf{y} = y_i.$

Notação: $\mathbf{y} = Q(\mathbf{x}).$

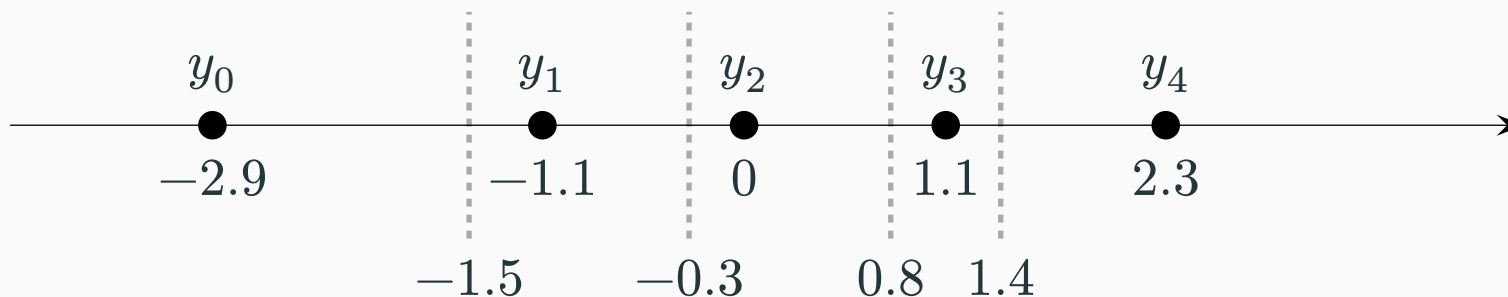
Exemplo

Um quantizador com $L = 5$ tem níveis

$$y_0 = -2.9, y_1 = -1.1, y_2 = 0, y_3 = 1.1, y_4 = 2.3$$

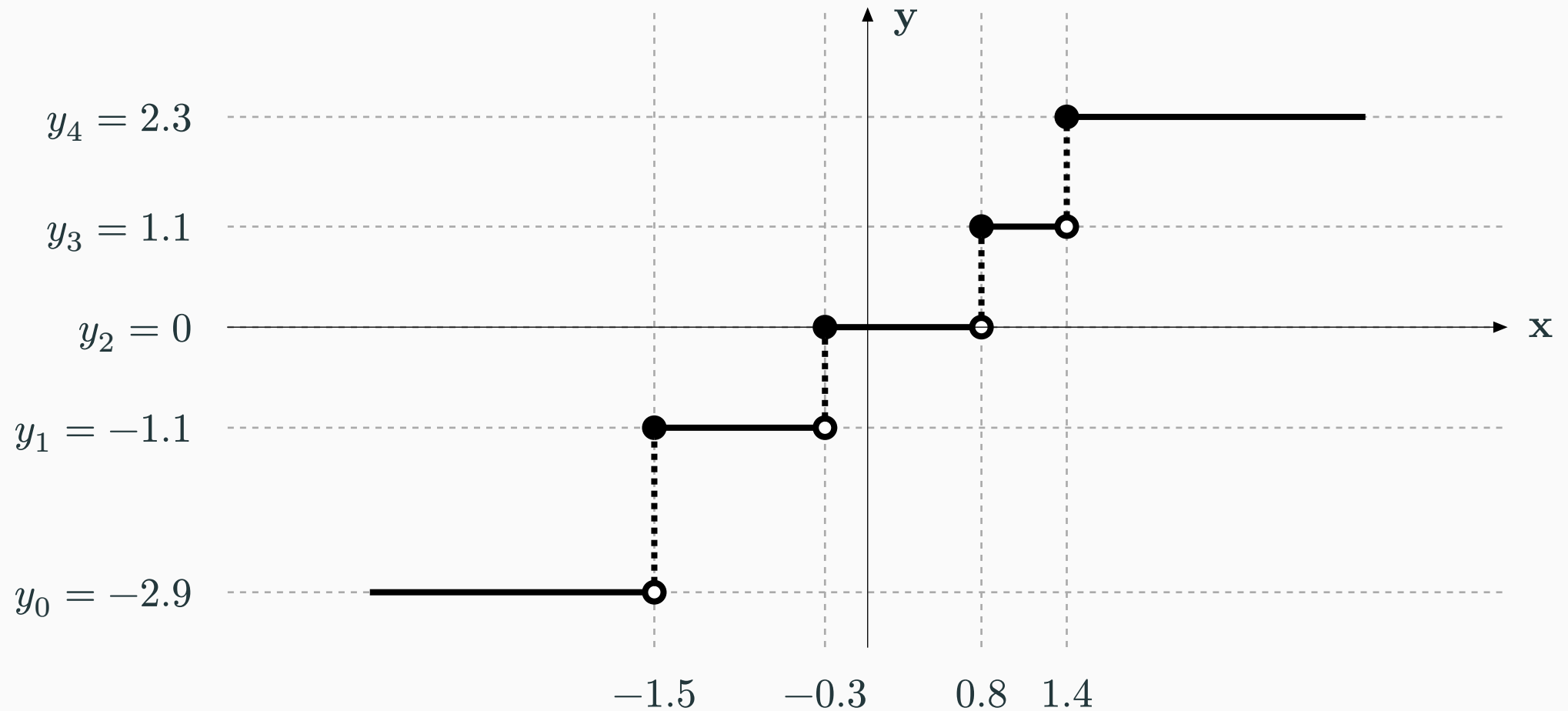
e limiares finitos

$$\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = -0.3, \lambda_3 = 0.8, \lambda_4 = 1.4.$$



Por exemplo, a entrada $x = 0.9$ é mapeada no índice $d = 3$ e na saída $y = y_3 = 1.1$.

Curva entrada $\times$ saída



Quantização uniforme

Um quantizador escalar é dito ser **uniforme** se:

- A separação entre os níveis de quantização é *constante*, Δ .
- Os limiares finitos se situam nos *pontos médios* entre os níveis de quantização.
- Como consequência, a distância entre os limiares finitos também é Δ .

O parâmetro Δ é chamado de **passo de quantização**.

Quantização uniforme

Um quantizador escalar é dito ser **uniforme** se:

- A separação entre os níveis de quantização é *constante*, Δ .
- Os limiares finitos se situam nos *pontos médios* entre os níveis de quantização.
- Como consequência, a distância entre os limiares finitos também é Δ .

O parâmetro Δ é chamado de **passo de quantização**.

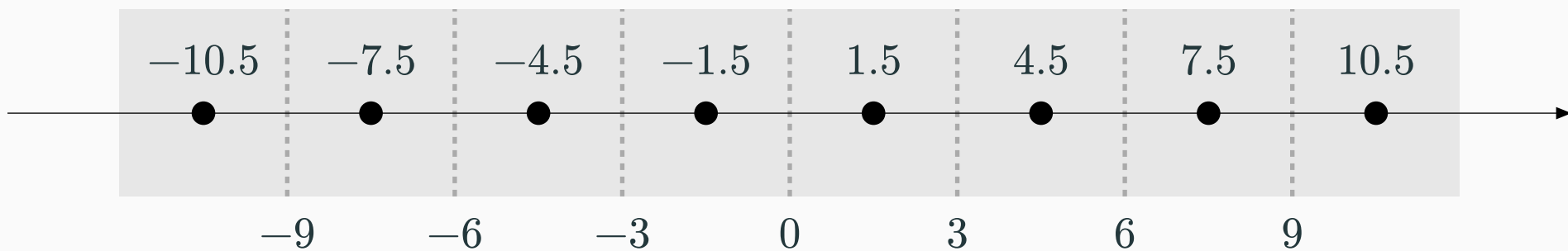
Quando a entrada x está confinada ao intervalo $[-A, A]$, então

$$\Delta = \frac{2A}{L}.$$

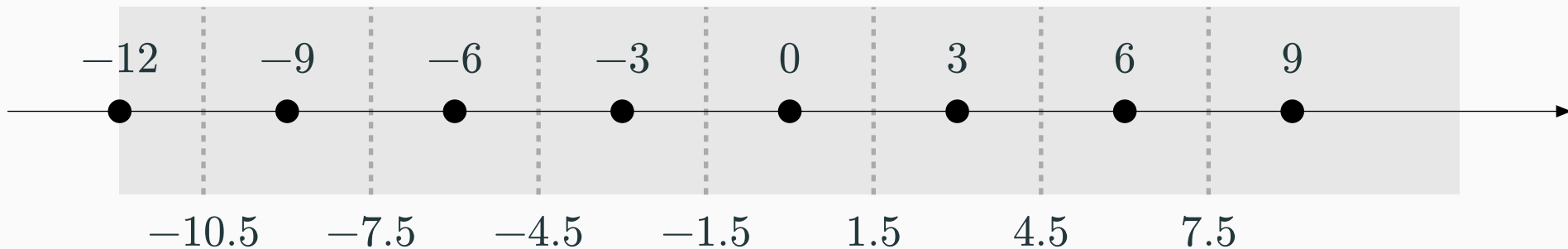
Tipos mid-riser e mid-tread

Exemplos para $L = 8$ e $\mathbf{x} \in [-12, 12]$.

- Mid-riser: 0 é um limiar.



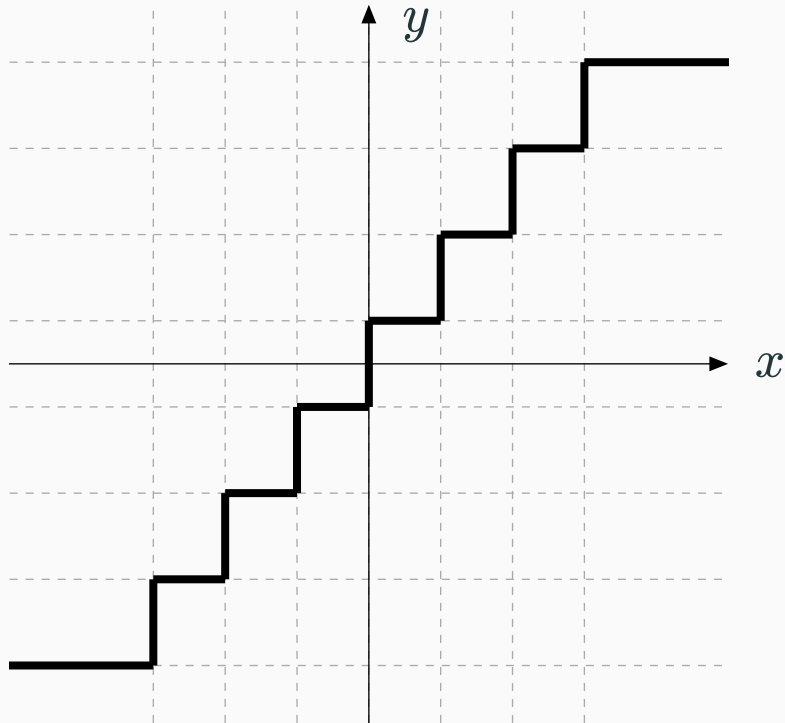
- Mid-tread: 0 é um nível.



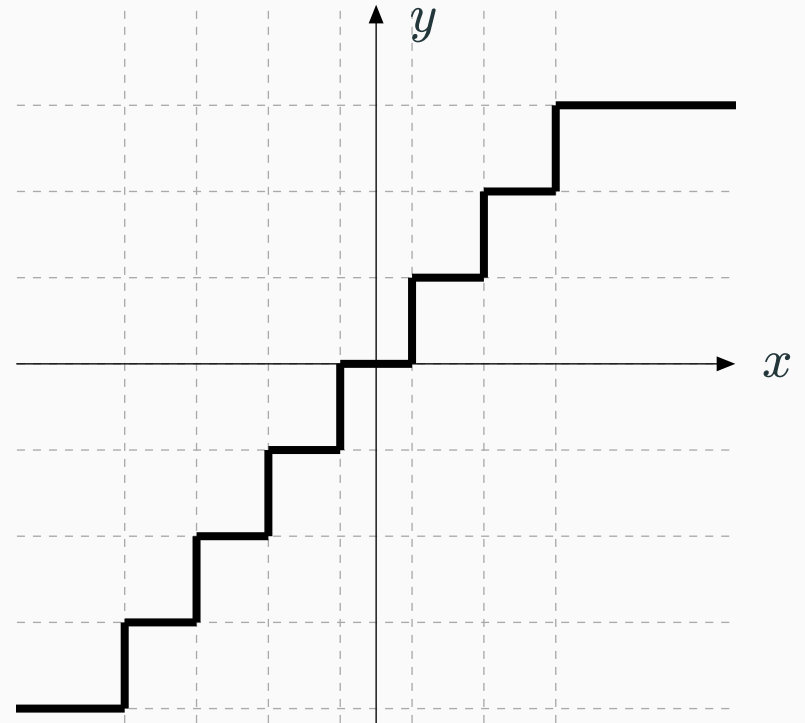
Tipos mid-riser e mid-tread

Exemplos para $L = 8$ e $\mathbf{x} \in [-12, 12]$.

Mid-riser



Mid-tread



Exercício 3

A onda sinusoidal

$$x(t) = 5 \sin(2\pi t) \quad [\text{em volts}]$$

é amostrada a uma taxa de 8 amostra/s e quantizada com um quantizador mid-riser de 8 níveis e passo de 2 V.

- (a) Esboce a curva entrada $\times$ saída do quantizador.
- (b) Determine as sequências de índices e de amostras quantizadas.

Considere um ciclo completo da entrada e assuma a primeira amostra em $t = 0$.

Exercício 3

Resposta:

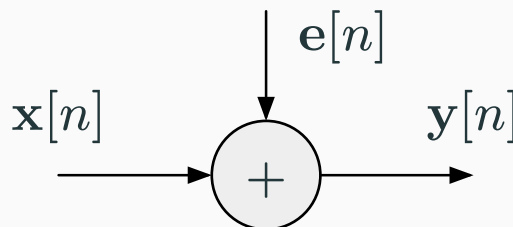
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}[n]$	0.0	3.54	5.0	3.54	0.0	-3.54	-5.0	-3.54
$\mathbf{d}[n]$	4	5	6	5	4	2	1	2
$\mathbf{y}[n]$	1.0	3.0	5.0	3.0	1.0	-3.0	-5.0	-3.0

Erro de quantização

O **erro de quantização** de um quantizador escalar (não necessariamente uniforme) é definido por

$$e[n] = y[n] - x[n].$$

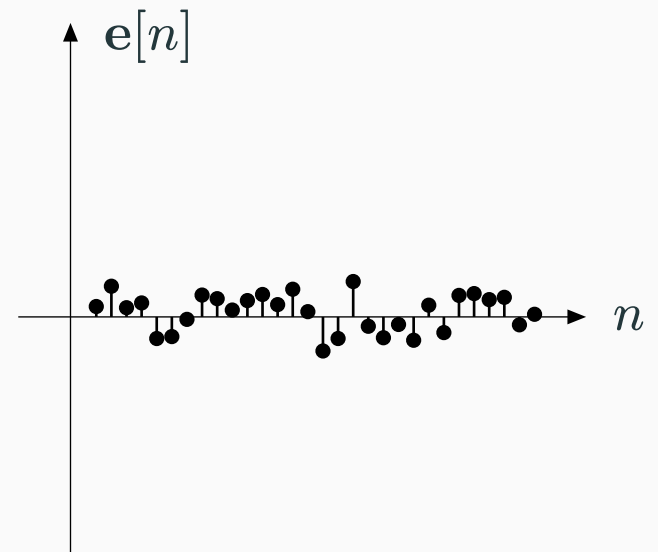
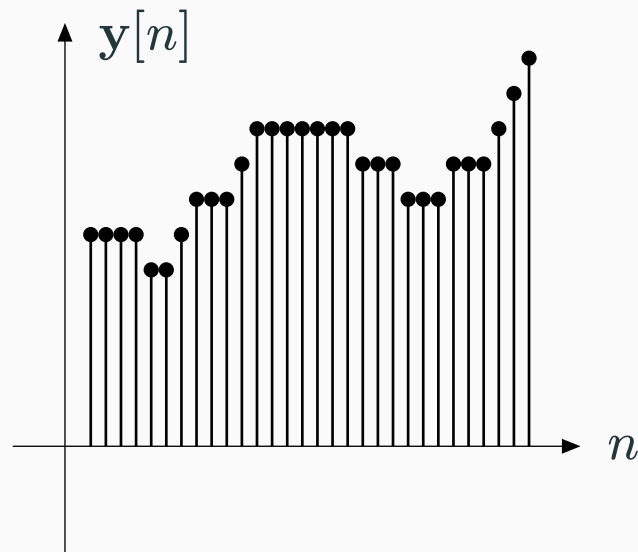
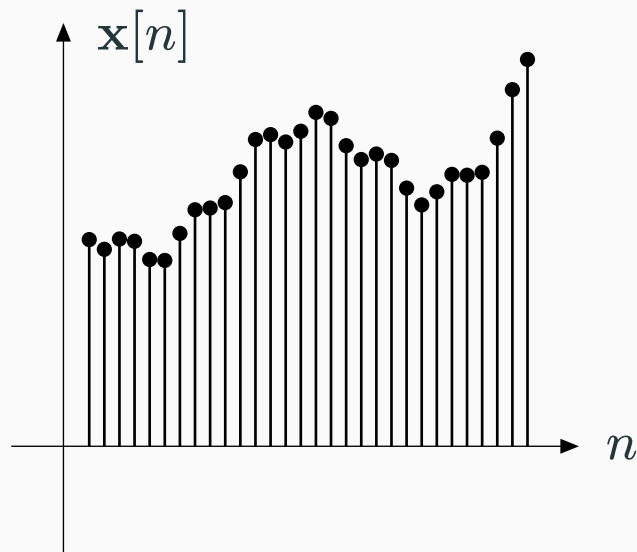
Assim, tem-se o diagrama abaixo.



Por isso, $e[n]$ também é chamado de *ruído de quantização*.

Assim como antes, escreveremos $e = e[n]$ para simplificar a notação.

Sinais envolvidos



Figuras de mérito de um quantizador

- **Erro quadrático médio (MSE):** *Mean square error:*

É a potência do erro de quantização:

$$\text{MSE} = P_e = \mathbb{E}[\mathbf{e}^2] = \mathbb{E}[(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2].$$

- **Razão sinal-ruído (SNR):** *Signal-to-noise ratio:*

É a razão entre a potência do sinal e a potência do erro de quantização:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\mathbf{x}}}{P_e} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{x}^2]}{\mathbb{E}[\mathbf{e}^2]}.$$

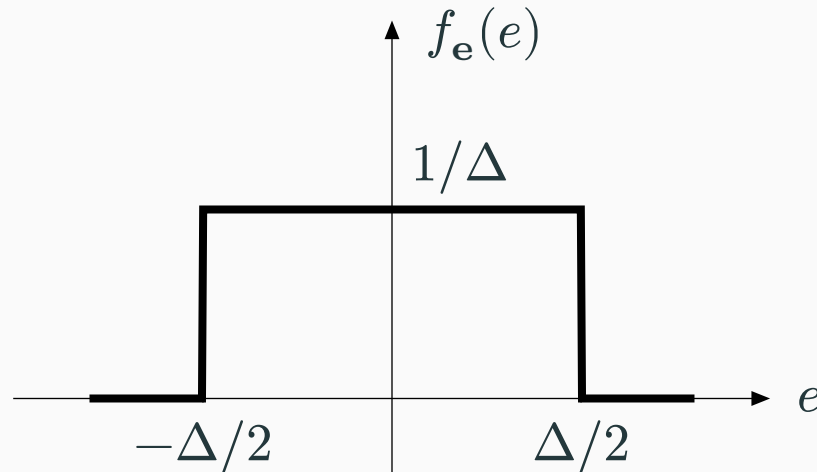
Observação: Alternativamente, encontra-se na literatura as siglas “MSQE” e “SQNR”, para enfatizar que se refere ao erro ou ruído de quantização.

Análise do quantizador uniforme: Hipóteses

Hipóteses:

- Não há saturação.
- O passo de quantização Δ é suficientemente pequeno.

Nesse caso, é possível mostrar que o erro de quantização é *aproximadamente uniforme* sobre o intervalo $[-\Delta/2, \Delta/2]$.



Portanto, o erro quadrático médio será

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= P_e = \mathbb{E}[\mathbf{e}^2] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_{\mathbf{e}}(e) \, de \\&= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} \, de \\&= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{e^3}{3} \right]_{e=-\Delta/2}^{e=\Delta/2} \\&= \frac{\Delta^2}{12}.\end{aligned}$$

Análise do quantizador uniforme: SNR

Assumindo que a entrada x está confinada ao intervalo $[-A, A]$, a SNR será dada por

$$\text{SNR} = \frac{P_x}{P_e} = \frac{P_x}{\Delta^2/12} = \frac{P_x}{\frac{4A^2}{L^2}/12},$$

ou seja,

$$\text{SNR} = 3 \frac{P_x}{A^2} L^2.$$

Análise do quantizador uniforme: Conclusão

Se o número de níveis for uma potência de 2, digamos $L = 2^k$, então cada índice d pode ser representado por $k = \log_2 L$ bits, e a fórmula anterior nos diz que

$$\text{SNR} \propto L^2 \propto 4^k$$

Conclusão:

O aumento de 1 bit *quadruplica* a SNR.

Em dB, temos o famoso “6 dB por bit”.

Exercício 4

Um sinal de voz com duração de 10s é amostrado à taxa de 8k amostra/s, quantizado uniformemente e, finalmente, codificado em bits. Determine a mínima capacidade de armazenamento (em kB) necessária para acomodar a versão digitalizada do sinal, supondo uma SNR de no mínimo 40 dB.

Exercício 4

Um sinal de voz com duração de 10s é amostrado à taxa de 8k amostra/s, quantizado uniformemente e, finalmente, codificado em bits. Determine a mínima capacidade de armazenamento (em kB) necessária para acomodar a versão digitalizada do sinal, supondo uma SNR de no mínimo 40 dB.

Resposta: 560 kbit = 70 kB.

Se a entrada x se distribui de acordo com uma pdf conhecida f_x , como projetar o quantizador para minimizar o erro médio quadrático?

Serão considerados dois casos:

- *Quantizador uniforme:*

Dados f_x e L , qual o melhor valor de Δ ?

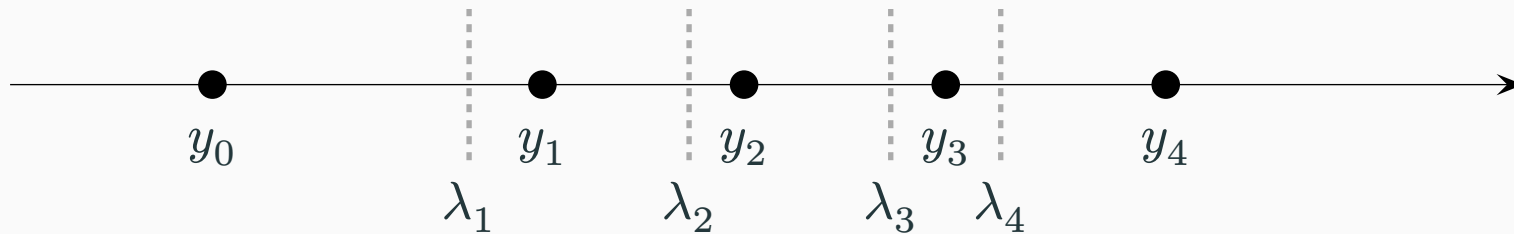
- *Quantizador não-uniforme:*

Dados f_x e L , quais os melhores posicionamentos dos níveis y 's e dos limiares λ 's?

Expressão geral para o erro médio quadrático

De modo geral, o erro médio quadrático é dado por

$$\begin{aligned}\text{MSE} = P_e &= \mathbb{E}[(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (Q(x) - x)^2 f_{\mathbf{x}}(x) \, dx \\ &= \sum_{i \in [0:L)} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (y_i - x)^2 f_{\mathbf{x}}(x) \, dx.\end{aligned}$$



Quantização uniforme ótima

No caso de **quantização uniforme**, o problema é o seguinte:

“Dados f_x e L , qual o melhor valor de Δ ?”

Sob hipótese de quantizador simétrico, os níveis são

$$y_i = (i - (L - 1)/2)\Delta, \quad i \in [0 : L),$$

e os limiares (finitos) são

$$\lambda_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad i \in [1 : L).$$

Para encontrar o valor ótimo de Δ , substitui-se y_i e λ_i na fórmula do MSE e utiliza-se algum método numérico.

Quantização não-uniforme ótima: Algoritmo de Lloyd-Max

No caso de **quantização não-uniforme**, o problema é o seguinte:

“Dados $f_{\mathbf{x}}$ e L , quais os melhores posicionamentos dos níveis y 's e dos limiares λ 's?”

Teorema. (S. P. Lloyd, 1957; J. Max, 1960)

- Fixados os níveis y 's, a escolha dos limiares λ 's que minimiza o MSE é dada por

$$\lambda_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad i \in [1 : L). \quad (1)$$

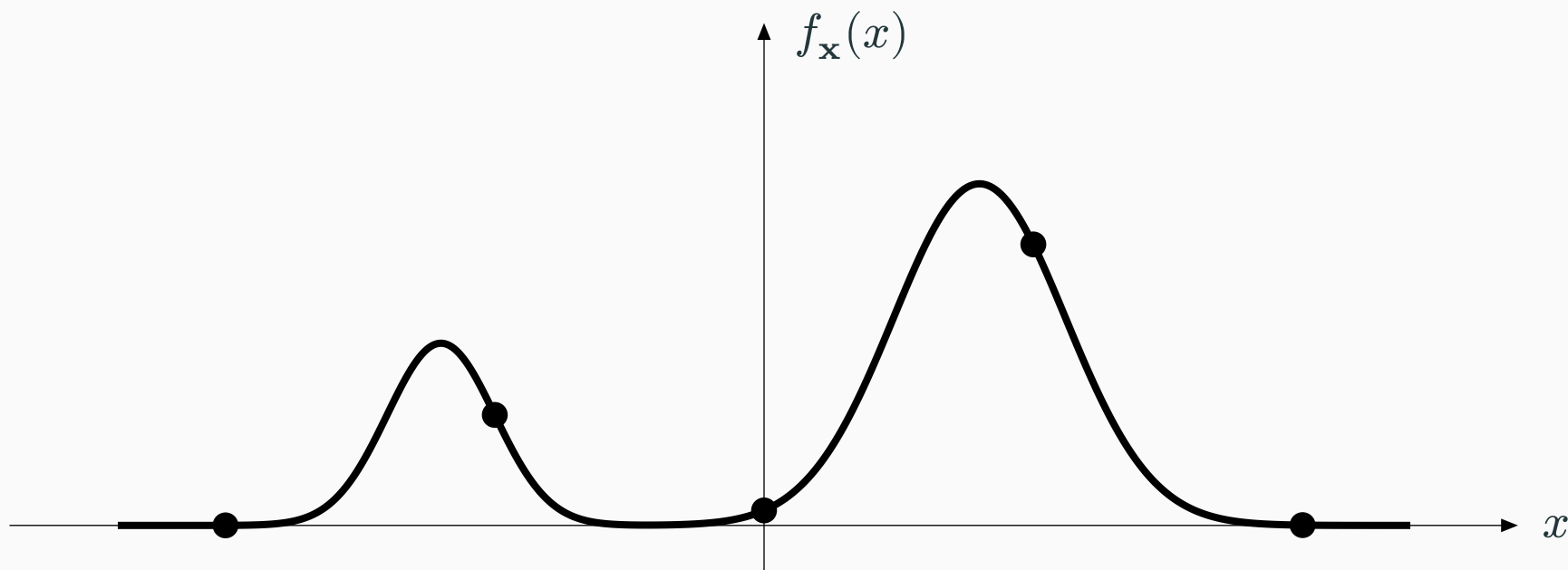
- Fixados os limiares λ 's, a escolha dos níveis y 's que minimiza o MSE é dada por

$$y_i = \mathbb{E}[\mathbf{x} \mid \lambda_i \leq \mathbf{x} < \lambda_{i+1}], \quad i \in [0 : L). \quad (2)$$

O **algoritmo de Lloyd–Max** consiste em iniciar com uma escolha arbitrária de y 's e atualizar, iterativamente, λ 's conforme (1) e y 's conforme (2), até convergência.

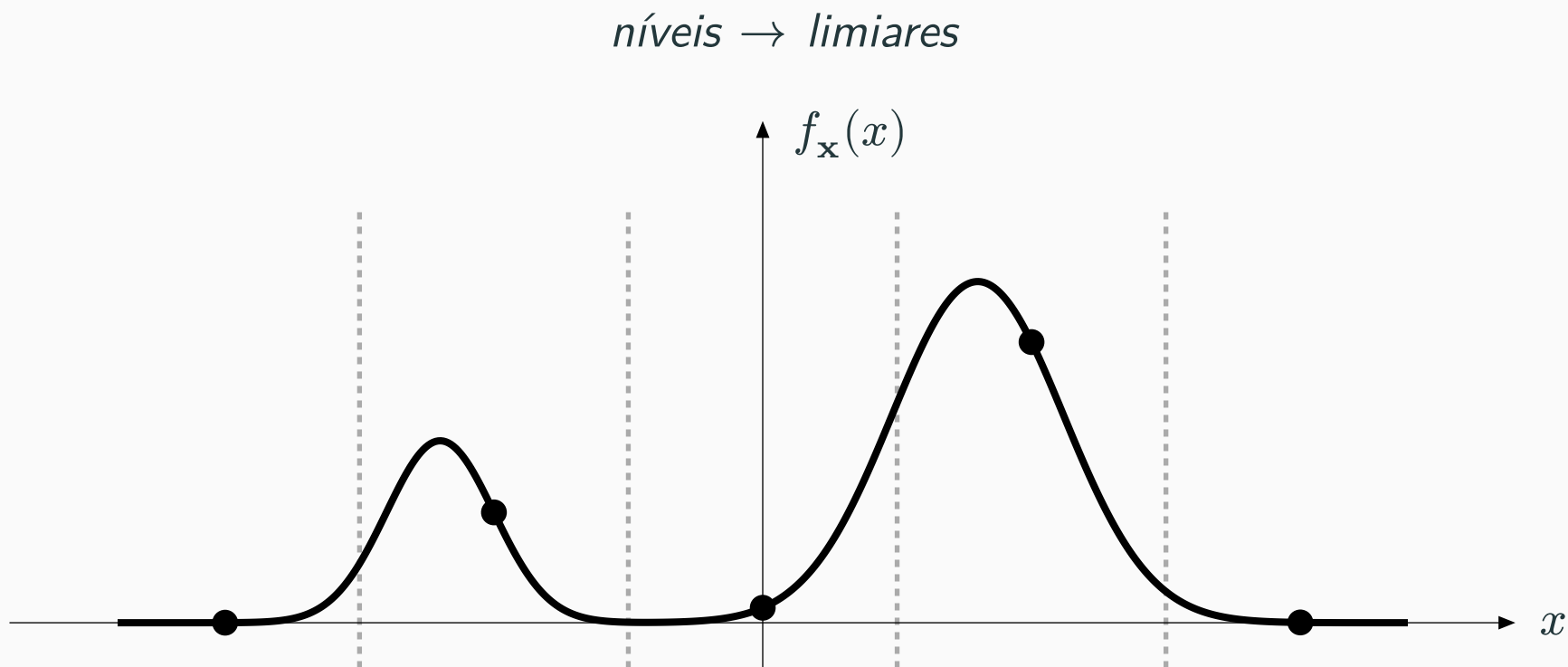
Ilustração

Exemplo para $f_{\mathbf{x}}$ mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



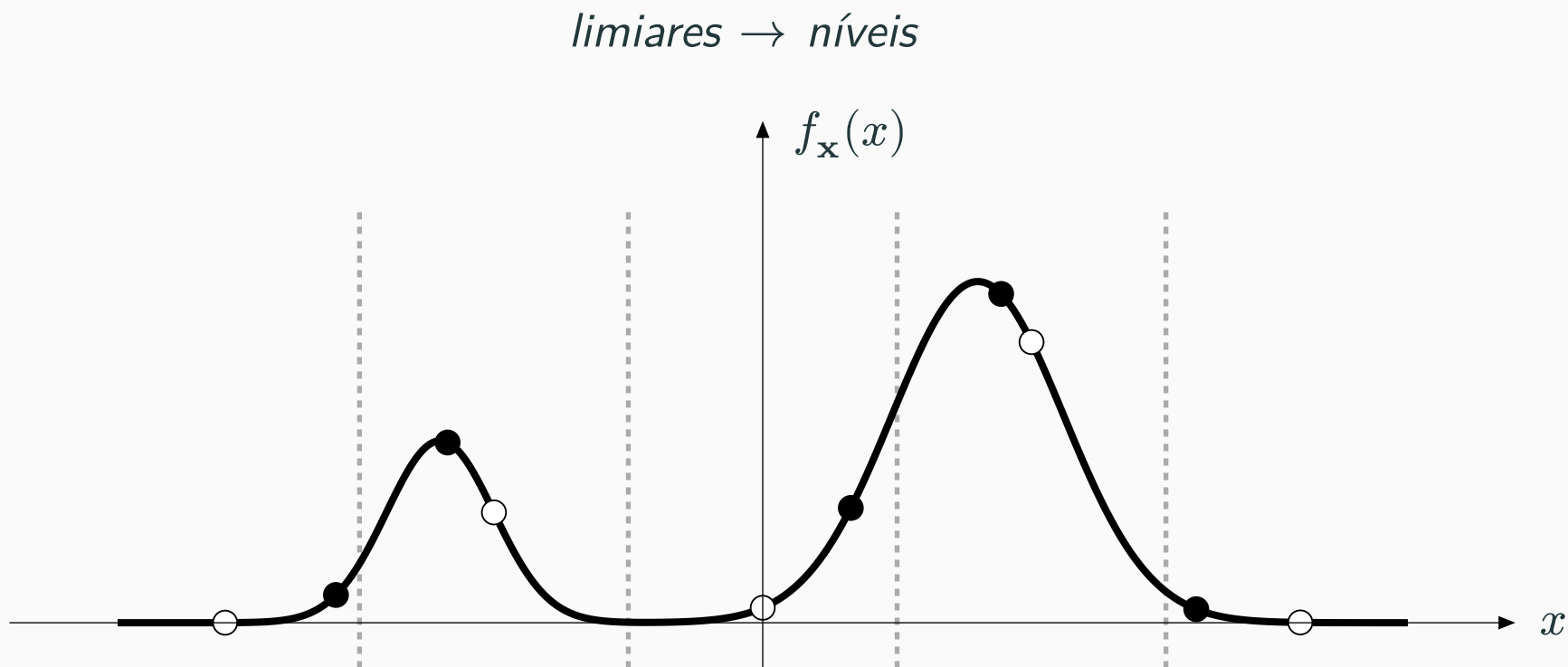
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



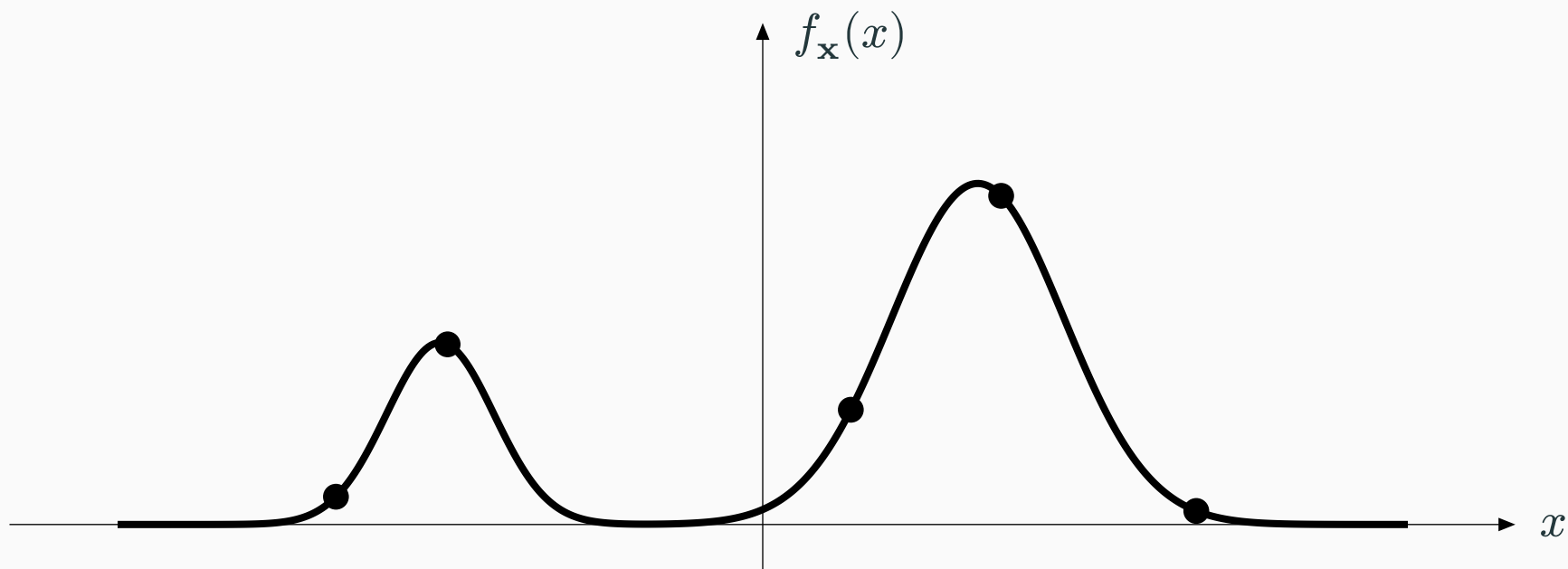
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



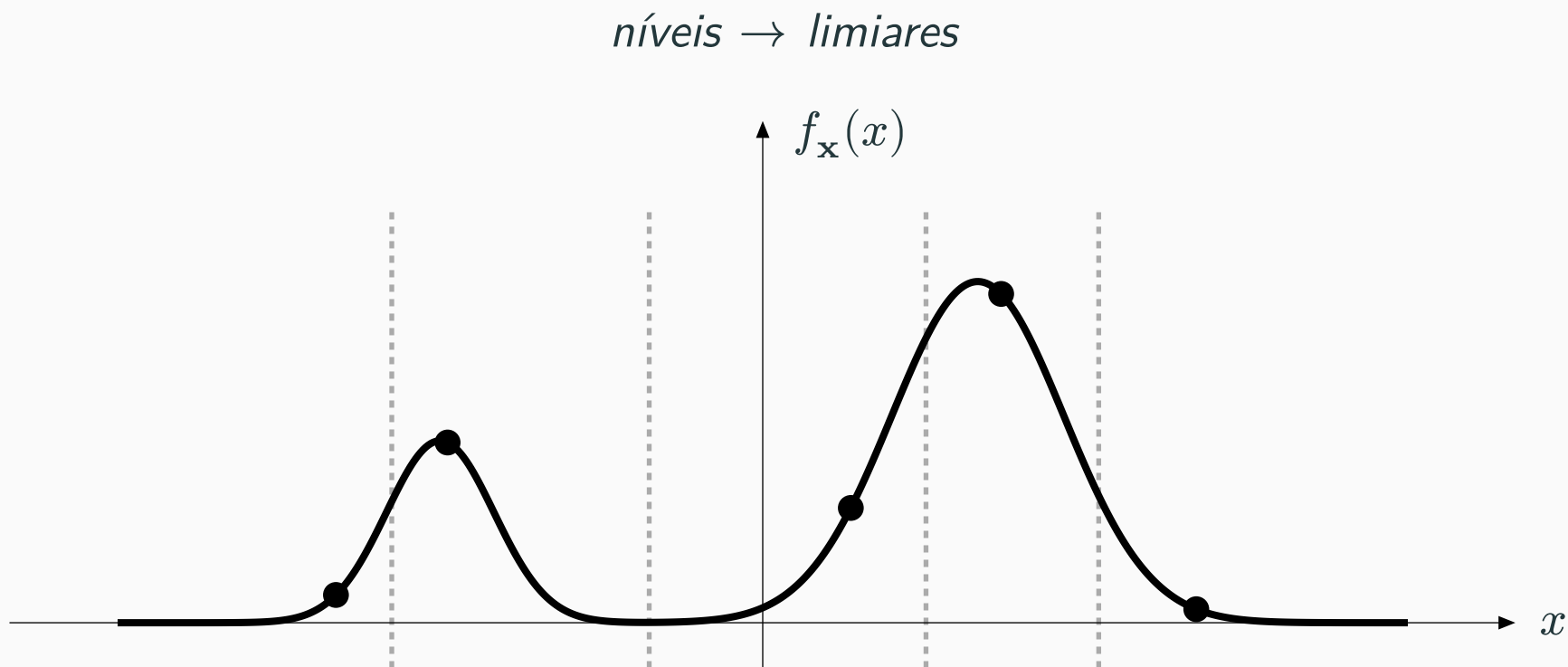
Ilustração

Exemplo para $f_{\mathbf{x}}$ mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



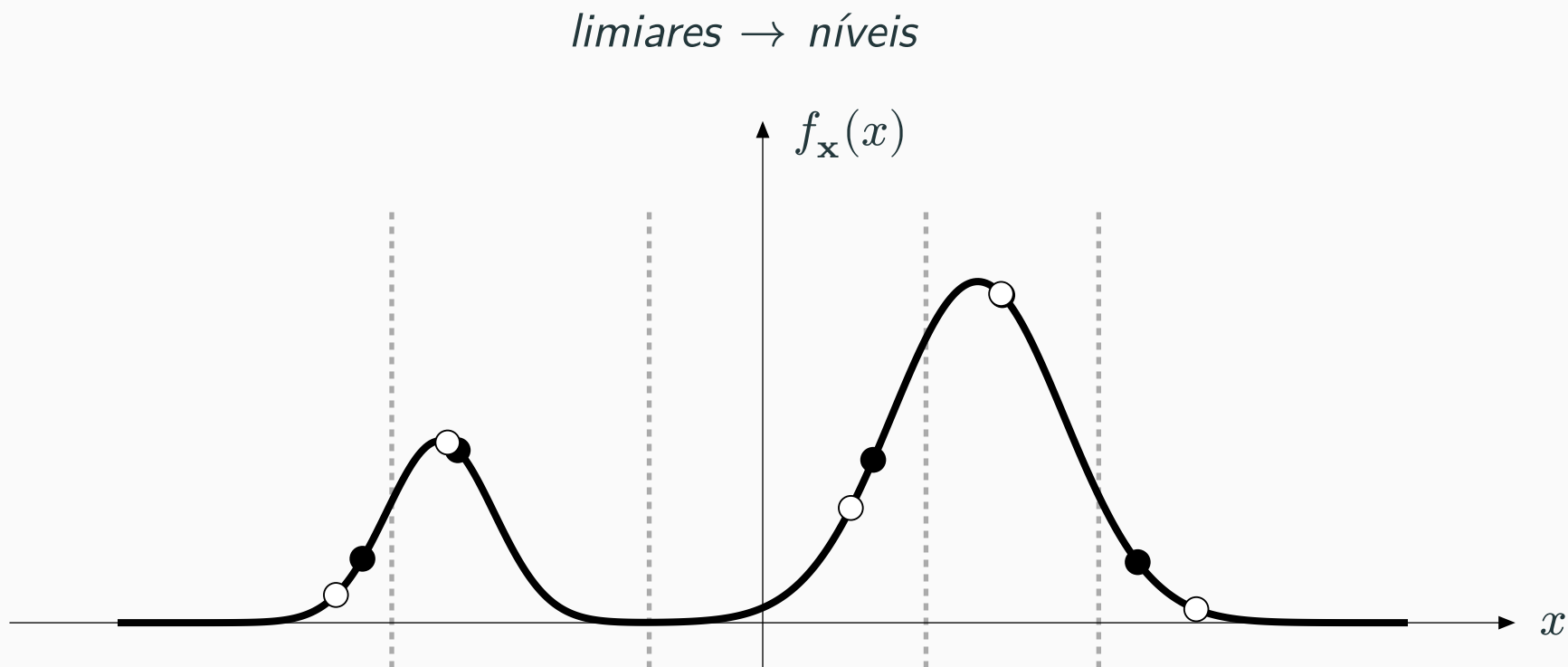
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



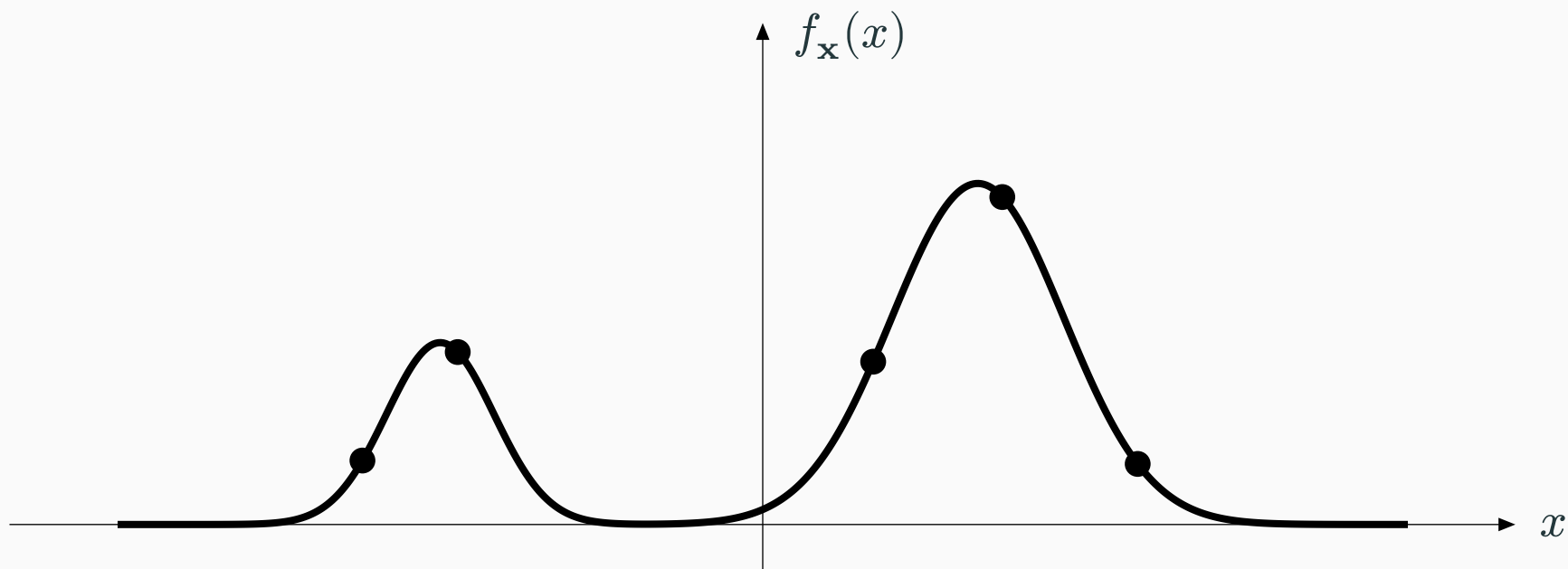
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



Ilustração

Exemplo para $f_{\mathbf{x}}$ mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



- O valor esperado condicional em (2) é calculado a partir de

$$\mathbb{E}[\mathbf{x} \mid \lambda_i \leq \mathbf{x} < \lambda_{i+1}] = \frac{\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} x f_{\mathbf{x}}(x) dx}{\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} f_{\mathbf{x}}(x) dx}.$$

- O algoritmo *sempre* irá convergir em um número finito de passos.

O erro quadrático médio ou decresce ou permanece igual; como é não-negativo, se aproxima de algum limite.

- No entanto, é possível que o algoritmo convirja para um mínimo local.

Uma prática comum é executar o algoritmo várias vezes, partindo de escolhas de y 's aleatórias e, ao final, manter a melhor solução.

- O algoritmo pode ser generalizado naturalmente para quantização vetorial.

Referências

- [1] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] K. Sayood, *Introduction to Data Compression*, 3rd ed. Morgan Kaufmann, 2006.