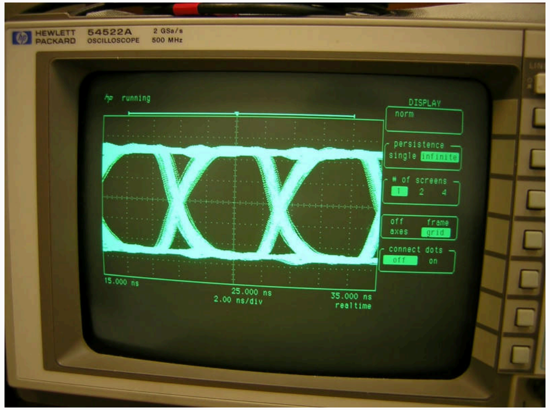
Sistemas de Comunicação I

Amostragem e quantização

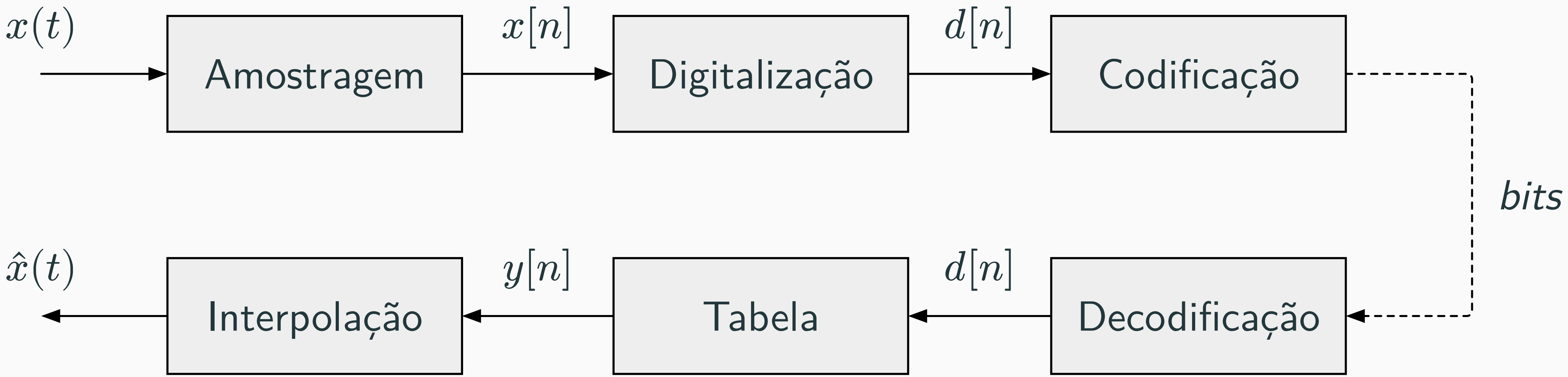


Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

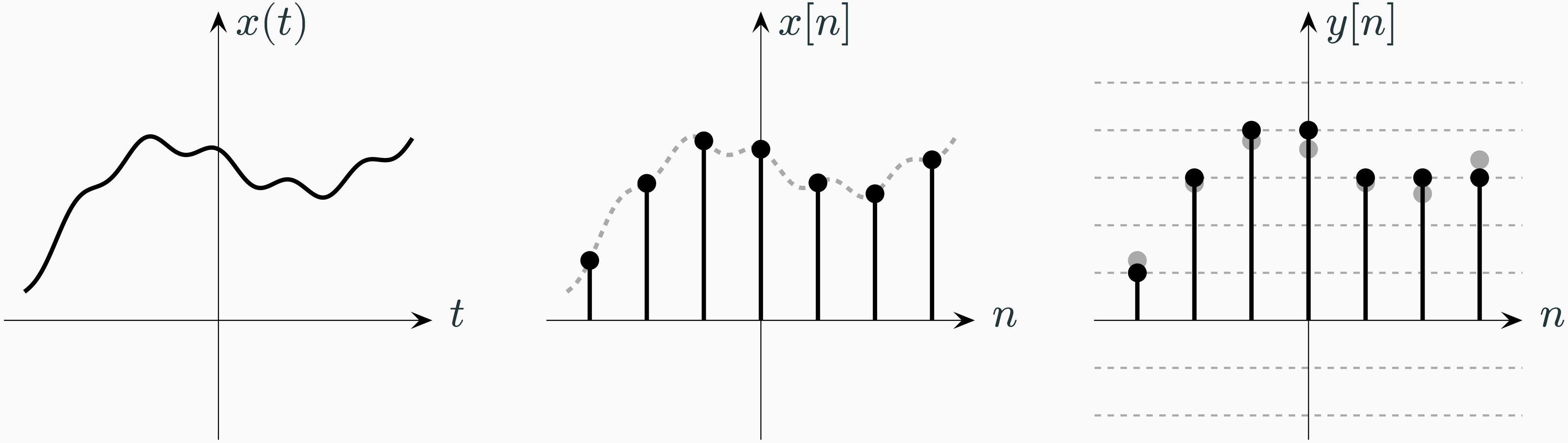
Instituto Federal de Santa Catarina

Introdução

Diagrama de blocos



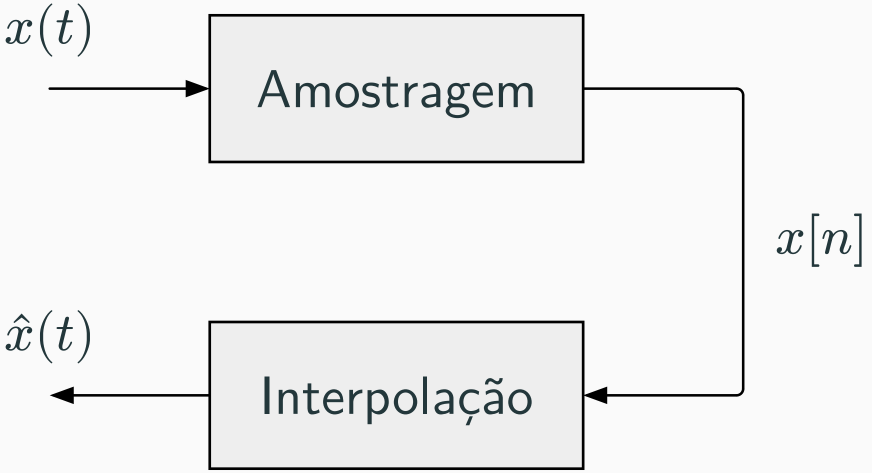
Sinais envolvidos



Amostragem

Modelo matemático da amostragem

Será considerada **amostragem uniforme**: $x[n] = x(nT_\mathrm{a})$, para $n \in \mathbb{Z}$.



Sinais envolvidos:

- $x(t)$: sinal original.
- $x[n]$: sequência de amostras.
- $\hat{x}(t)$: sinal reconstruído.

Parâmetros do sistema:

- T_a: intervalo de amostragem (s).
- f_a: taxa de amostragem (amostras/s).
- Relação: $f_\mathrm{a} = 1/T_\mathrm{a}$.

Exercício

Seja $x(t)$ uma onda triangular de amplitude $4\,\mathrm{V}$, frequência fundamental de $10\,\mathrm{Hz}$ e pico ocorrendo em $t = 0$. Determine a saída de um amostrador com taxa de amostragem de $f_\mathrm{a} = 80$ amostras/s.

Exercício

Seja $x(t)$ uma onda triangular de amplitude $4\,\mathrm{V}$, frequência fundamental de $10\,\mathrm{Hz}$ e pico ocorrendo em $t = 0$. Determine a saída de um amostrador com taxa de amostragem de $f_{\mathrm{a}} = 80$ amostras/s.

Resposta:

n	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$x[n]$	$\cdots$	-2	-4	-2	0	2	4	2	0	-2	-4	-2	$\cdots$

Teorema da amostragem

Seja $x(t)$ um sinal real e $X(f)$ sua transformada de Fourier. Suponha que $X(f) = 0$ para $|f| \geq B_x$. Então, $x(t)$ pode ser recuperado a partir de suas amostras $x[n]$ se

$$f_{\mathrm{a}} > 2B_x.$$

Nesse caso,

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \, \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_{\mathrm{a}}}{T_{\mathrm{a}}}\right).$$

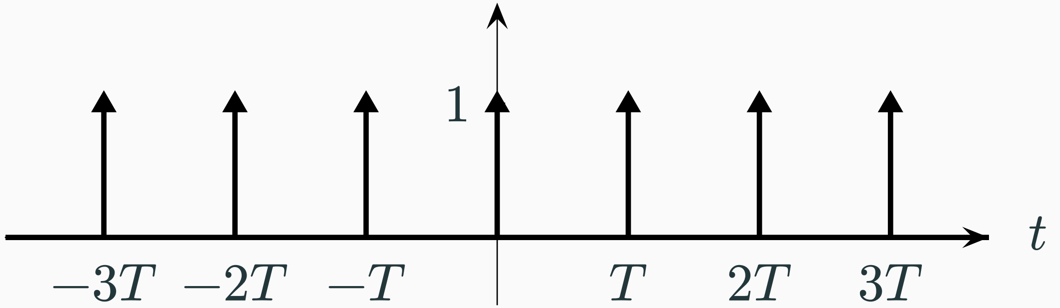
Observações:

- O termo $f_{\mathrm{Nyq}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2B_x$ é chamado de *taxa de Nyquist* de $x(t)$.
- A fórmula acima é chamada de *fórmula de interpolação de Whittaker–Shannon*.
- O teorema foi descoberto e redescoberto várias vezes na história (cf. Wikipedia).

Parênteses: pente de Dirac

O **pente de Dirac**, também conhecido como *trem de impulsos*, é definido por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

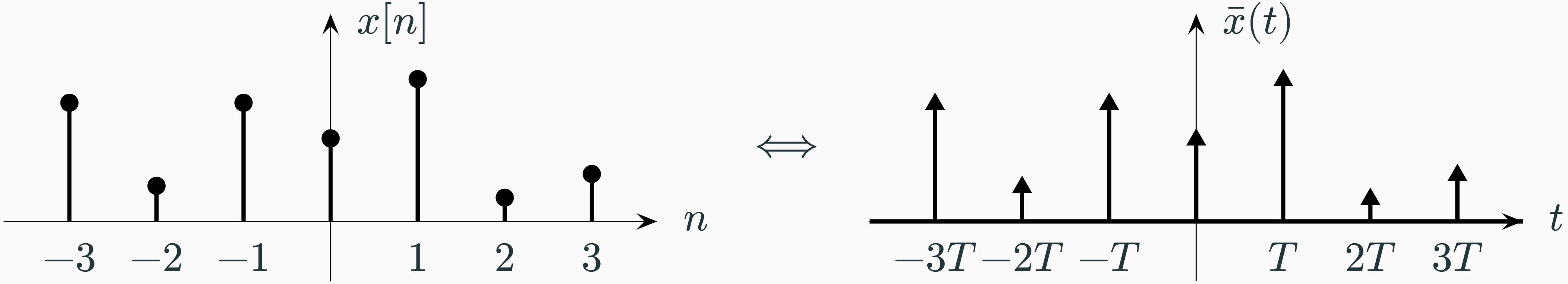


A transformada de Fourier de um pente no tempo é um pente na frequência!

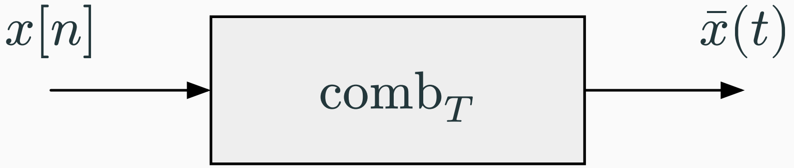
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Parênteses: pente de Dirac

O seguinte artifício matemático é bastante utilizado para representar uma sequência em tempo discreto como um sinal de tempo contínuo.



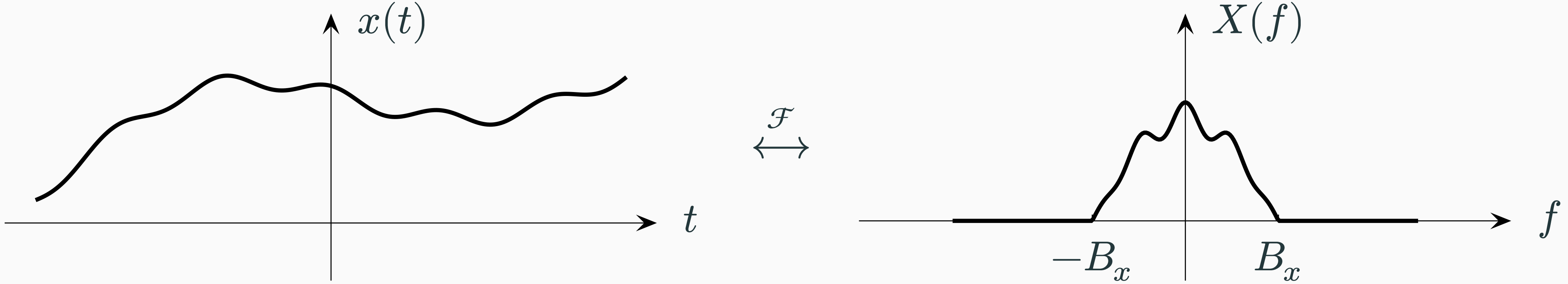
Note que $x[n]$ e $\bar{x}(t)$ são equivalentes em termos de informação.



$$\bar{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]\delta(t - nT)$$

Demonstração do teorema da amostragem

Seja $x(t)$ um sinal e $X(f)$ sua transformada de Fourier. Assuma $X(f) = 0$ para $|f| \geq B_x$.



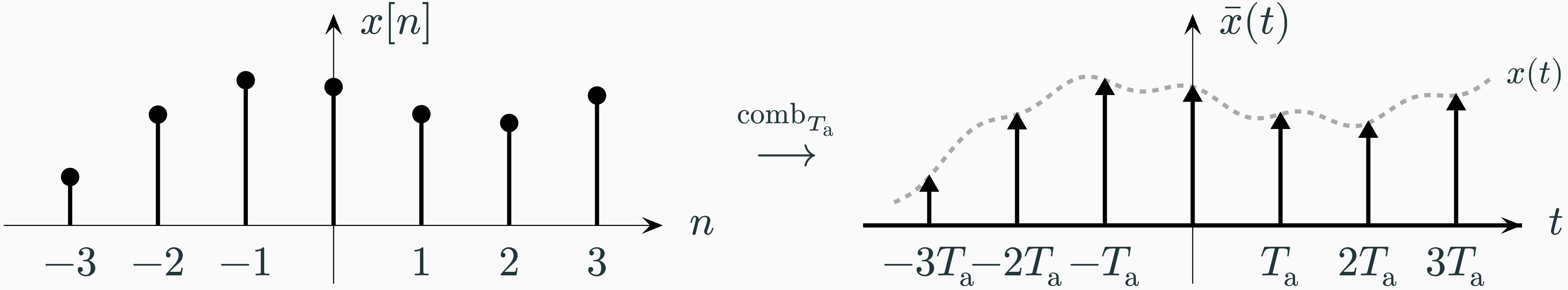
A ideia é seguir os seguintes passos para recuperar $x(t)$ a partir de $x[n]$:

$$x[n] \xrightarrow{\text{comb}_{T_\text{a}}} \bar{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \bar{X}(f) \xrightarrow{\text{LPF}_{f_\text{a}/2}} X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t).$$

Demonstração do teorema da amostragem

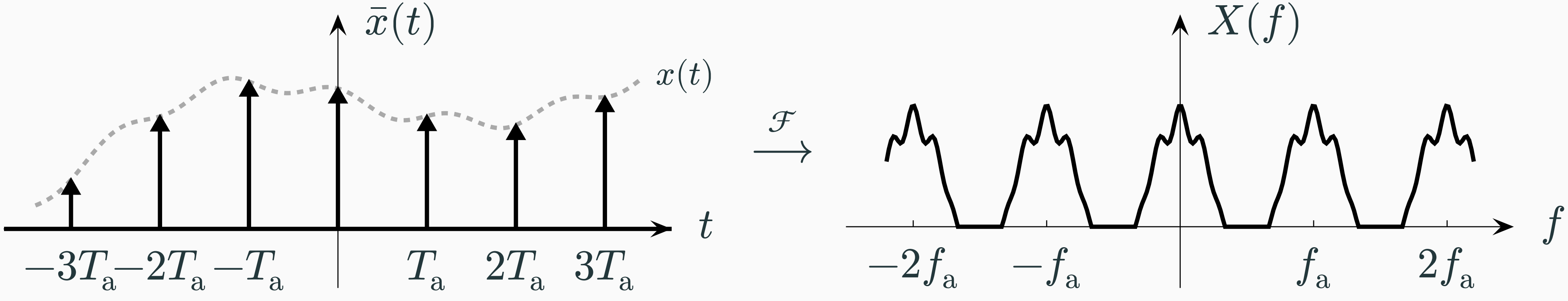
Primeiro passo:

$$\bar{x}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\delta(t - nT) = x(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_{\mathrm{a}}).$$



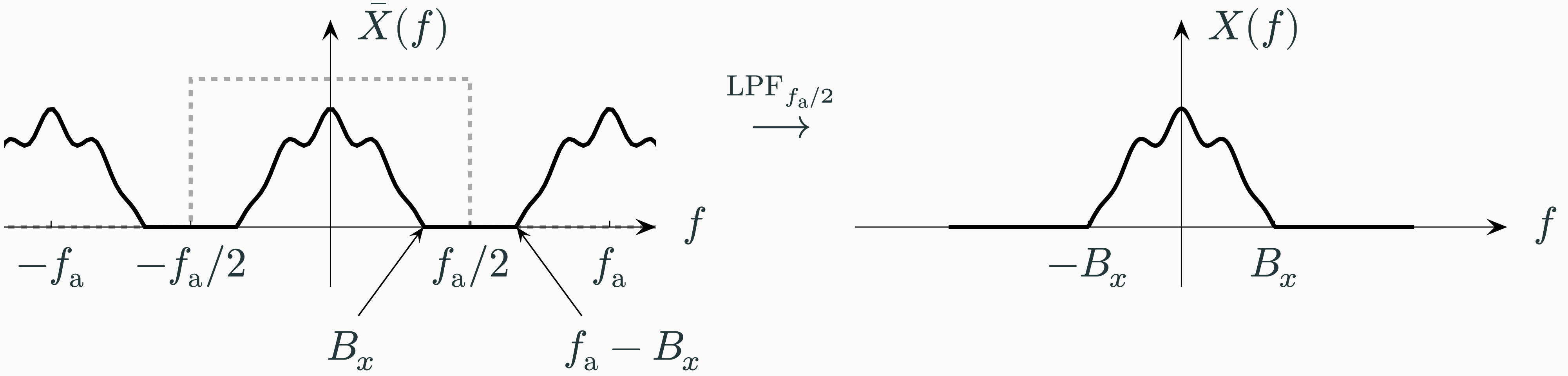
Segundo passo:

$$\bar{X}(f) = X(f) \star \frac{1}{T_{\mathrm{a}}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_{\mathrm{a}}}\right) = f_{\mathrm{a}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - kf_{\mathrm{a}}).$$



Terceiro passo:

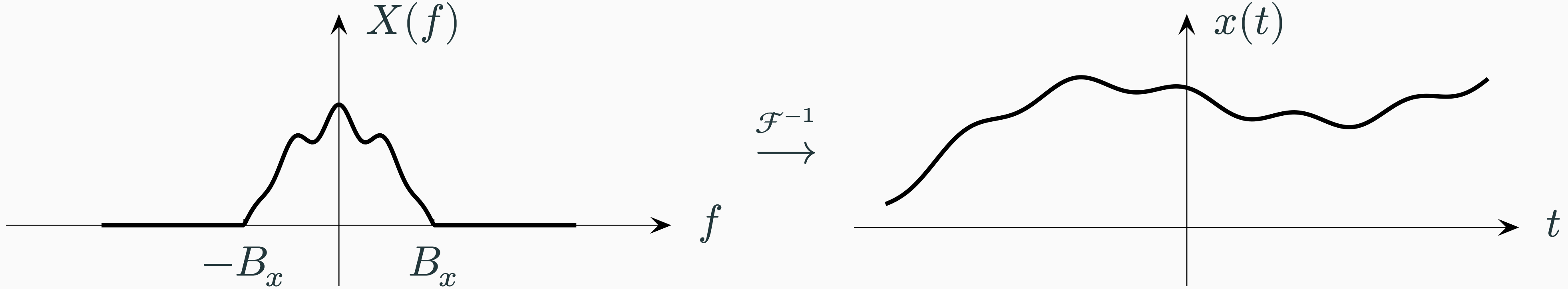
$$X(f) = \frac{1}{f_\mathrm{a}} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_\mathrm{a}}\right) \bar{X}(f) = T_\mathrm{a}\,\mathrm{rect}(T_\mathrm{a} f)\bar{X}(f).$$



Se $\underbrace{B_x < f_\mathrm{a} - B_x}_{f_\mathrm{a} > 2B_x}$, então não haverá sobreposição espectral e $X(f)$ será recuperado.

Quarto passo:

$$x(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_\mathrm{a}}\right) \star \bar{x}(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_\mathrm{a}}\right) \star \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\delta(t - nT_\mathrm{a}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_\mathrm{a}}{T_\mathrm{a}}\right).$$



Exercício

Seja $x(t) = 2 + 600\,\mathrm{sinc}(200t) + 8\cos(2\pi 50t)$. Determine o máximo intervalo de amostragem de modo que seja possível recuperar $x(t)$ a partir das amostras $x[n]$.

Exercício

Seja $x(t) = 2 + 600\,\mathrm{sinc}(200t) + 8\cos(2\pi 50t)$. Determine o máximo intervalo de amostragem de modo que seja possível recuperar $x(t)$ a partir das amostras $x[n]$.

Resposta:

$X(f) = 2\delta(f) + 4\delta(f+50) + 4\delta(f-50) + 3\,\mathrm{rect}(f/200)$.

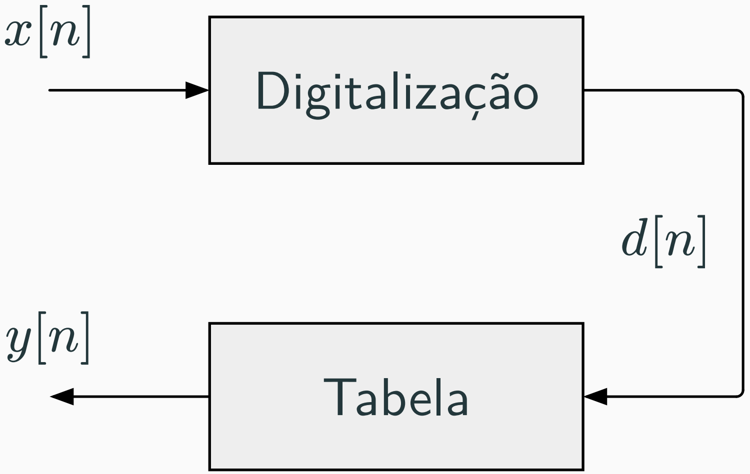
$f_{\mathrm{Nyq}} = 200$ amostras/s.

$T_{\mathrm{Nyq}} = 5\,\mathrm{ms}$.

Quantização

Modelo matemático

Será considerada **quantização escalar** (amostra por amostra).



Quantização $\stackrel{\text{def}}{=}$ operação $x[n] \mapsto y[n]$.

Sinais envolvidos:

- $x[n]$: sequência original de amostras.
- $d[n]$: sequência de índices.
- $y[n]$: sequência de amostras quantizadas.

Parâmetros do sistema:

- L: número de níveis de quantização.
- $v_0, v_1, ..., v_{L-1}$: níveis de quantização.
- $t_0, t_1, ..., t_L$: limiares de quantização.

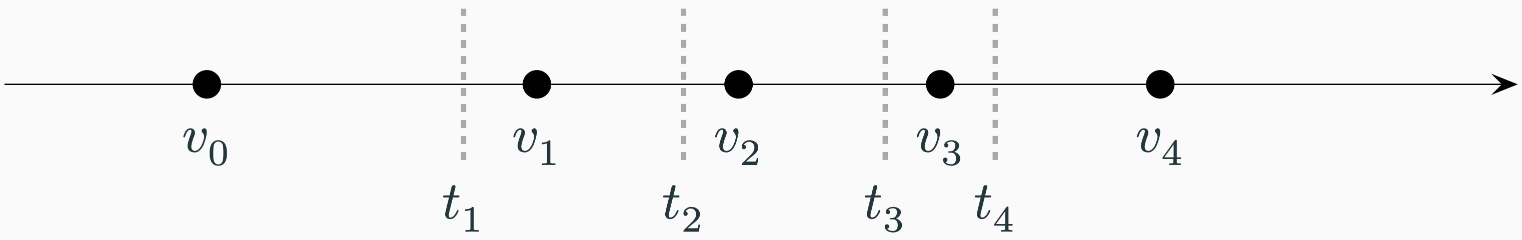
Simplificando a notação, escreveremos $x = x[n]$, $d = d[n]$ e $y = y[n]$.

Modelo matemático

Os níveis e limiares devem respeitar

$$-\infty = t_0 < v_0 < t_1 < v_1 < \cdots < t_{L-1} < v_{L-1} < t_L = \infty.$$

Exemplo com $L = 5$:



Regra de quantização:

$$x \in [t_i, t_{i+1}) \iff d = i \iff y = v_i$$

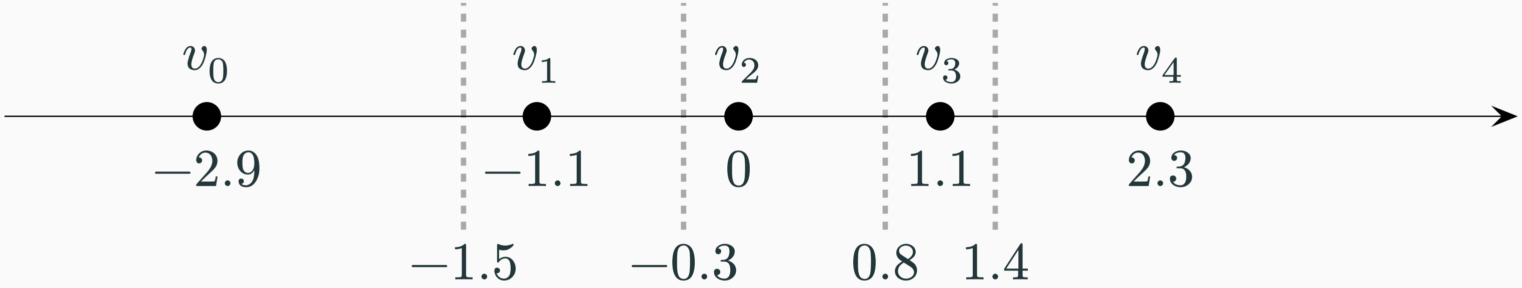
Exemplo

Um quantizador com $L = 5$ níveis tem níveis

$$v_0 = -2.9,\ v_1 = -1.1,\ v_2 = 0,\ v_3 = 1.1,\ v_4 = 2.3$$

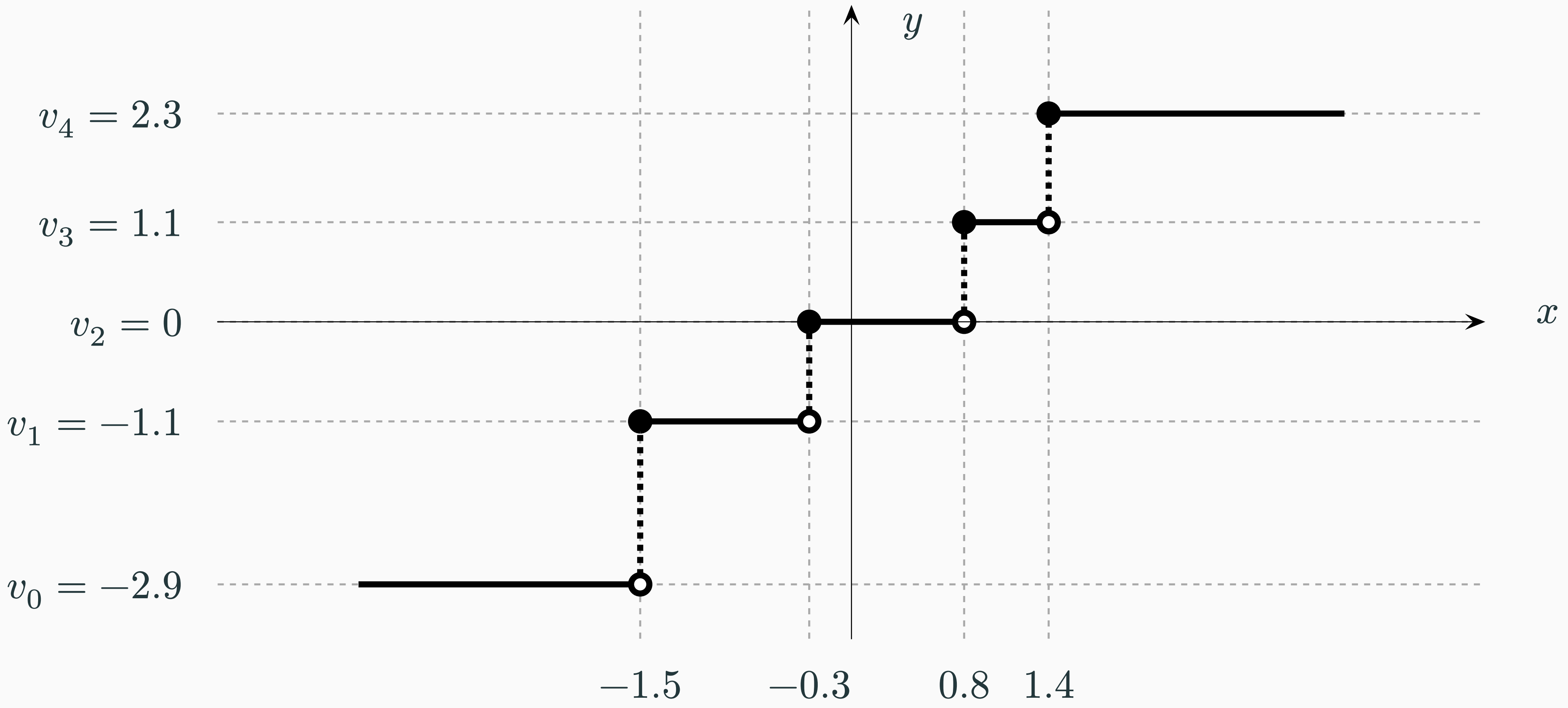
e limiares finitos

$$t_1 = -1.5,\ t_2 = -0.3,\ t_3 = 0.8,\ t_4 = 1.4.$$



Por exemplo, a entrada $x = 0.9$ é mapeada no índice $d = 3$ e na saída $y = v_3 = 1.1$.

Curva entrada × saída



Quantização uniforme

Um quantizador escalar é dito ser **uniforme** se:

- A separação entre os níveis de quantização é *constante*, Δ.
- Os limiares finitos se situam nos *pontos médios* entros os níveis de quantização.
- Como consequência, a distância entre os limiares finitos também é Δ.

O parâmetro Δ é chamado de **passo de quantização**.

Quantização uniforme

Um quantizador escalar é dito ser **uniforme** se:

- A separação entre os níveis de quantização é *constante*, Δ.
- Os limiares finitos se situam nos *pontos médios* entros os níveis de quantização.
- Como consequência, a distância entre os limiares finitos também é Δ.

O parâmetro Δ é chamado de **passo de quantização**.

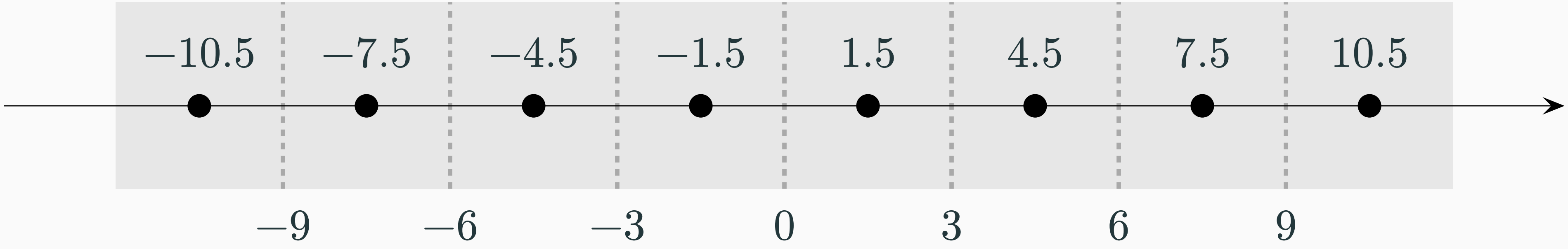
Quando a entrada x está confinada ao intervalo $[-A, A]$, então

$$\Delta = \frac{2A}{L}.$$

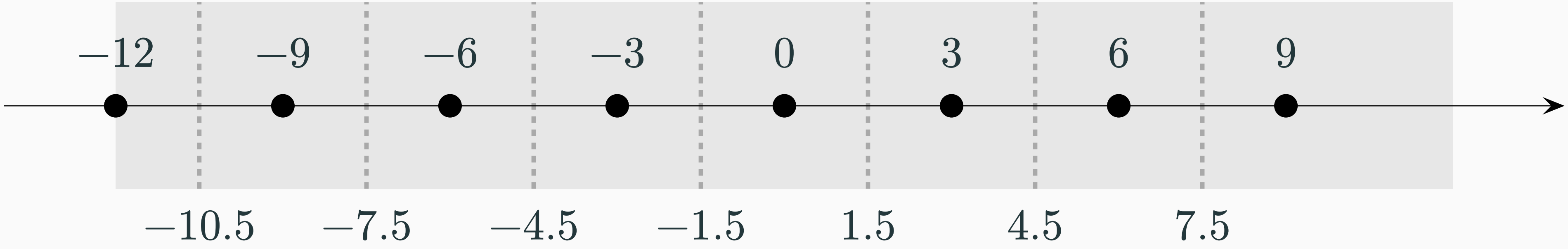
Tipos mid-riser e mid-tread

Exemplos para $L = 8$ e $x \in [-12, 12]$.

- Mid-riser: 0 é um limiar.



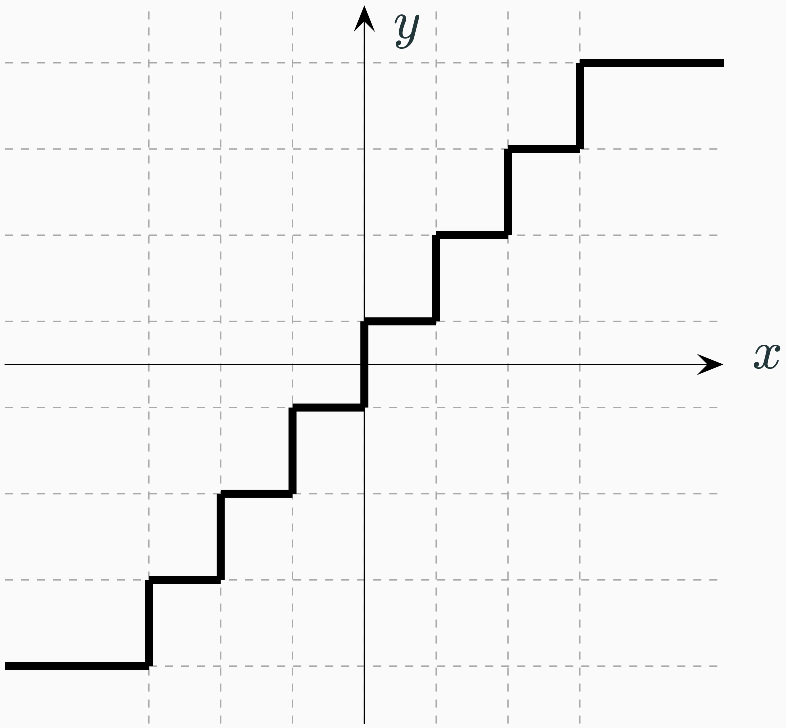
- Mid-tread: 0 é um nível.



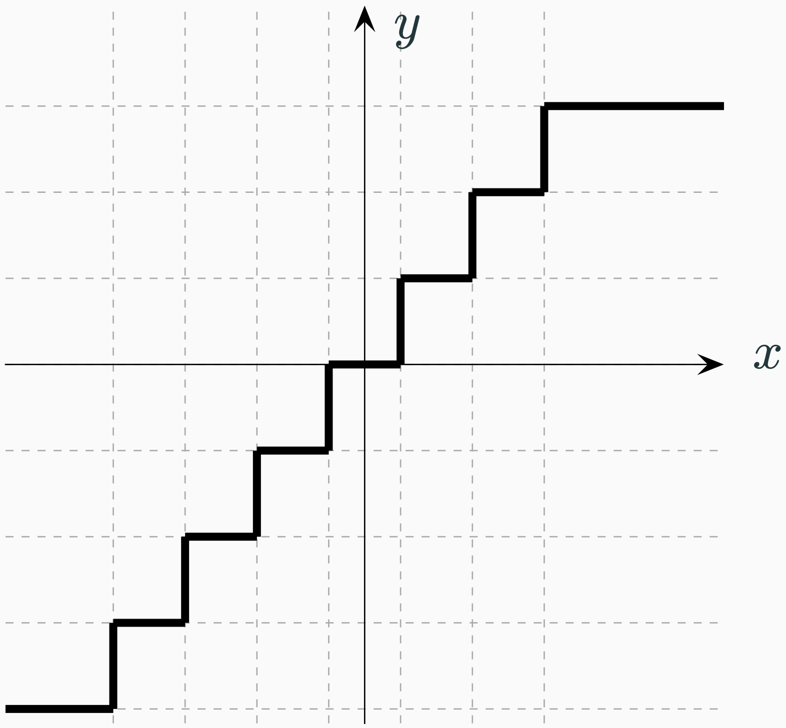
Tipos mid-riser e mid-tread

Exemplos para $L = 8$ e $x \in [-12, 12]$.

Mid-riser



Mid-tread



Exercício

A onda sinusoidal

$$x(t) = 5\sin(2\pi t) \quad \text{[em volts]}$$

é amostrada a uma taxa de 8 amostras/s e quantizada com um quantizador mid-riser de 8 níveis e passo de $2\,\mathrm{V}$.

(a) Esboce a curva entrada $\times$ saída do quantizador.

(b) Determine as sequências de índices e de amostras quantizadas.

Considere um ciclo completo da entrada e assuma a primeira amostra em $t = 0$.

Resposta:

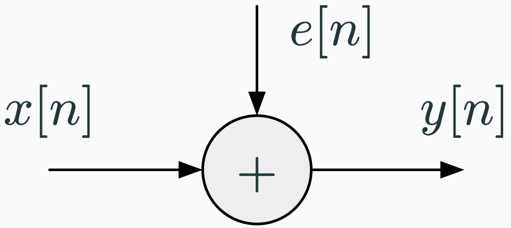
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0.0	3.54	5.0	3.54	0.0	-3.54	-5.0	-3.54
$d[n]$	4	5	6	5	4	2	1	2
$y[n]$	1.0	3.0	5.0	3.0	1.0	-3.0	-5.0	-3.0

Erro de quantização

O **erro de quantização** de um quantizador escalar (não necessariamente uniforme) é definido por

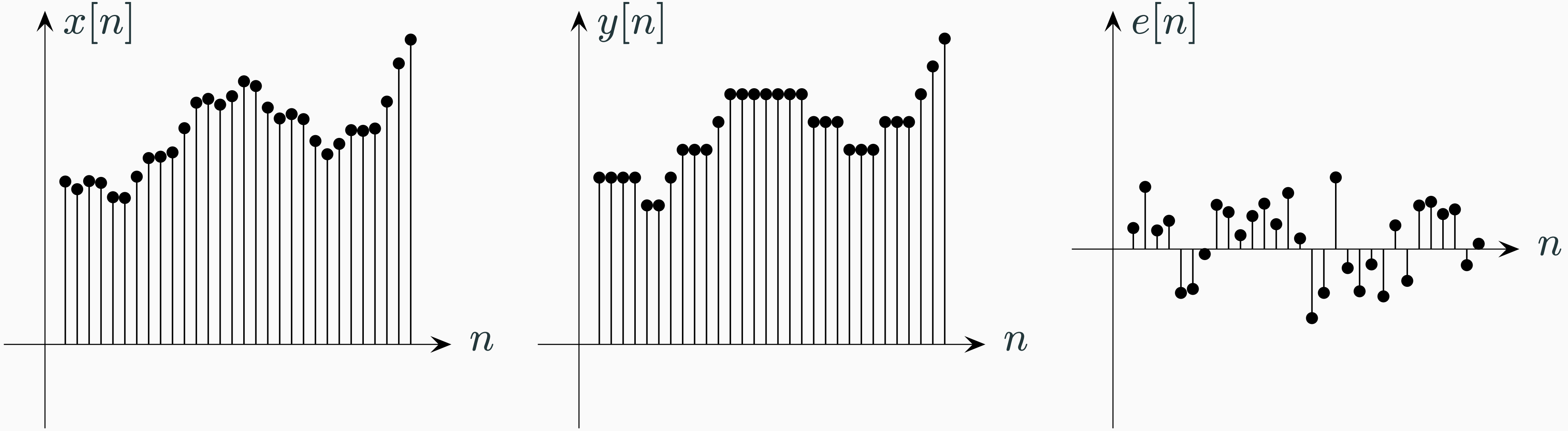
$$e[n] = y[n] - x[n].$$

Assim, tem-se o diagrama abaixo.



Por isso, $e[n]$ também é chamado de *ruído de quantização*.

Sinais envolvidos



- **Erro quadrático médio (MSE)**: *Mean square error*:

  É a potência do erro de quantização:

$$\mathrm{MSE} = P_e = \mathbb{E}[e^2] = \mathbb{E}[(y-x)^2].$$

- **Razão sinal-ruído (SNR)**: *Signal-to-noise ratio*:

  É a razão entre a potência do sinal e a potência do erro de quantização:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_x}{P_e} = \frac{\mathbb{E}[x^2]}{\mathbb{E}[e^2]}.$$

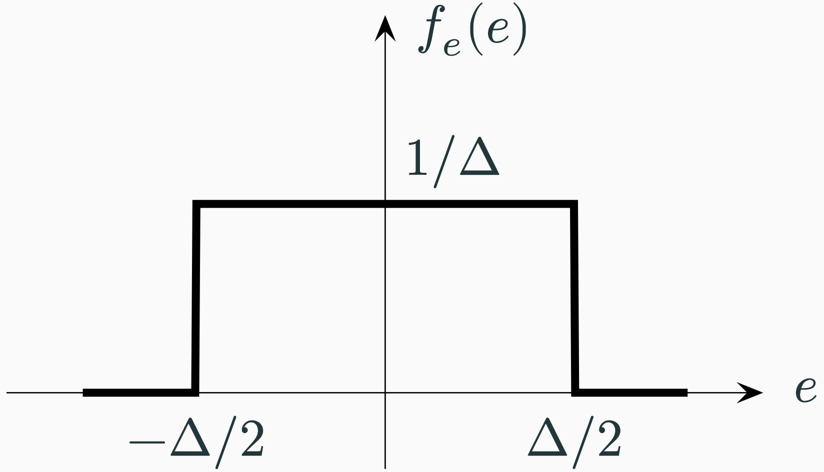
Observação: Alternativamente, encontra-se na literatura as siglas "MSQE" e "SQNR", para enfatizar que se refere ao erro ou ruído de quantização.

Análise do quantizador uniforme: Hipóteses

Hipóteses:

- Não há saturação.
- O passo de quantização Δ é suficientemente pequeno.

Nesse caso, é possível mostrar que o erro de quantização é *aproximadamente uniforme* sobre o intervalo $[-\Delta/2, \Delta/2]$.



Análise do quantizador uniforme: MSE

Portanto, o erro quadrático médio será

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE} = P_{\mathrm{e}} &= \mathbb{E}[e^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_e(e)\,\mathrm{d}e \\
&= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}e \\
&= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{e^3}{3}\right]_{e=-\Delta/2}^{e=\Delta/2} \\
&= \frac{\Delta^2}{12}.
\end{aligned}
$$

Análise do quantizador uniforme: SNR

Assumindo que a entrada x está confinada ao intervalo $[-A, A]$, a SNR será dada por

$$\text{SNR} = \frac{P_x}{P_e} = \frac{P_x}{\Delta^2/12} = \frac{P_x}{\frac{4A^2}{L^2}/12},$$

ou seja,

$$\text{SNR} = 3\frac{P_x}{A^2}L^2.$$

Análise do quantizador uniforme: Conclusão

Se o número de níveis for uma potência de 2, digamos $L = 2^k$, então cada índice d pode ser representado por $k = \log_2 L$ bits, e a fórmula anterior nos diz que

$$\mathrm{SNR} \propto L^2 \propto 4^k$$

Conclusão:

$$\boxed{\text{O aumento de 1 bit } \textit{quadruplica} \text{ a SNR.}}$$

Em dB, temos o famoso "$6\,\mathrm{dB}$ por bit".

Exercício

Um sinal de voz com duração de $10\,\mathrm{s}$ é amostrado à taxa de $8\,\mathrm{kHz}$, quantizado uniformemente e, finalmente, codificado em bits. Determine a mínima capacidade de armazenamento necessária para acomodar a versão digitalizada do sinal, supondo uma SNR de no mínimo $40\,\mathrm{dB}$.

Exercício

Um sinal de voz com duração de $10\,\mathrm{s}$ é amostrado à taxa de $8\,\mathrm{kHz}$, quantizado uniformemente e, finalmente, codificado em bits. Determine a mínima capacidade de armazenamento necessária para acomodar a versão digitalizada do sinal, supondo uma SNR de no mínimo $40\,\mathrm{dB}$.

Resposta: $560\,\mathrm{kbit} = 70\,\mathrm{kB}$.

Quantização baseada em pdf

Se a entrada x se distribui de acordo com uma pdf conhecida f_x, como projetar o quantizador para minimizar o erro médio quadrático?

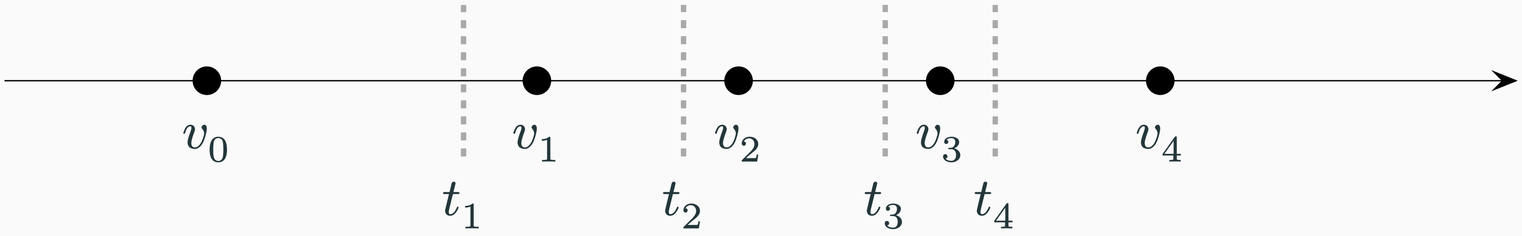
Serão considerados dois casos:

- *Quantizador uniforme:*
  Dados f_x e L, qual o melhor valor de Δ?
- *Quantizador não-uniforme:*
  Dados f_x e L, quais os melhores posicionamentos dos níveis v's e dos limiares t's?

Expressão geral para o erro médio quadrático

De modo geral, o erro médio quadrático é dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE} = P_e &= \mathbb{E}\left[(y-x)^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 f_x(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i\in[0:L)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i - x)^2 f_x(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$



Quantização uniforme ótima

No caso de **quantização uniforme**, o problema é o seguinte:

"Dados f_x e L, qual o melhor valor de Δ?"

Sob hipótese de quantizador simétrico, os níveis são

$$v_i = (i - (L-1)/2)\Delta, \quad i \in [0 : L),$$

e os limiares (finitos) são

$$t_i = \frac{v_{i-1} + v_i}{2}, \quad i \in [1 : L).$$

Para encontrar o valor ótimo de Δ, substitui-se t_i e v_i na fórmula do MSE e utiliza-se algum método numérico.

Quantização não-uniforme ótima: Algoritmo de Lloyd-Max

No caso de **quantização não-uniforme**, o problema é o seguinte:

"Dados f_x e L, quais os melhores posicionamentos dos níveis v's e dos limiares t's?"

Teorema. *(S. P. Lloyd, 1957; J. Max, 1960)*

- Fixados os níveis v's, a escolha dos limiares t's que minimiza o MSE é dada por

$$t_i = \frac{v_{i-1} + v_i}{2}, \quad i \in [1 : L). \tag{1}$$

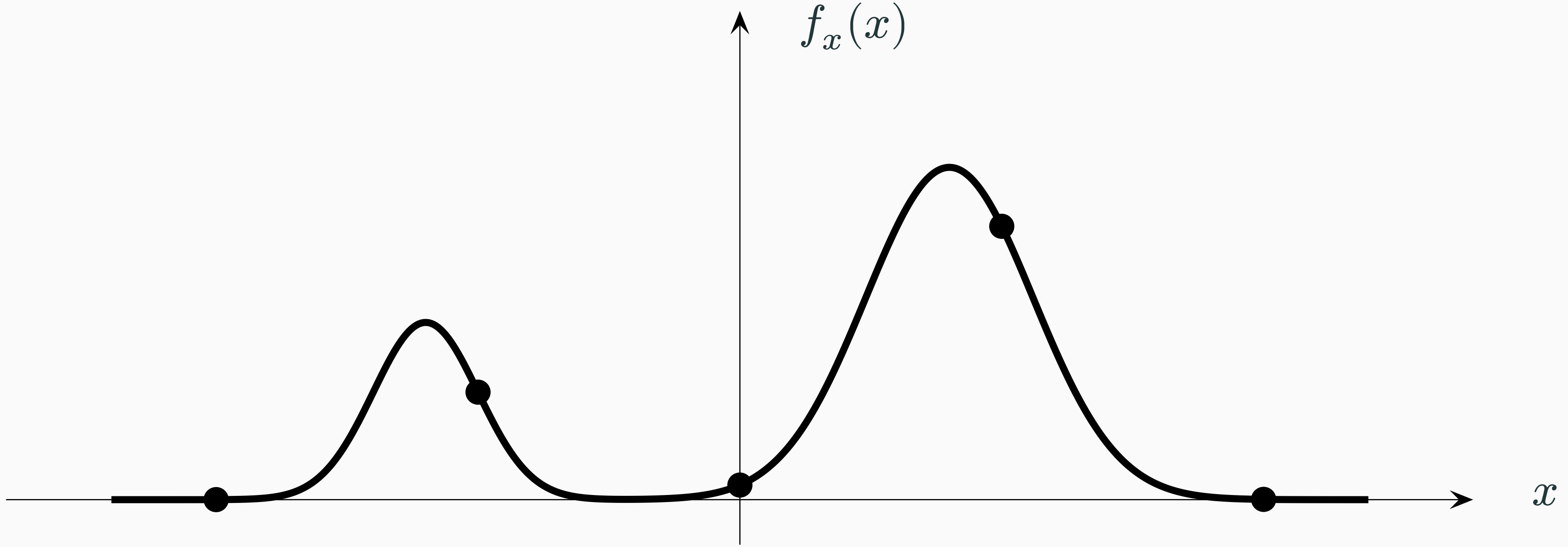
- Fixados os limiares t's, a escolha dos níveis v's que minimiza o MSE é dada por

$$v_i = \mathbb{E}[x \mid t_i \leq x < t_{i+1}], \quad i \in [0 : L). \tag{2}$$

O **algoritmo de Lloyd–Max** consiste em iniciar com uma escolha arbitrária de v's e atualizar, iterativamente, t's conforme (1) e v's conforme (2), até convergência.

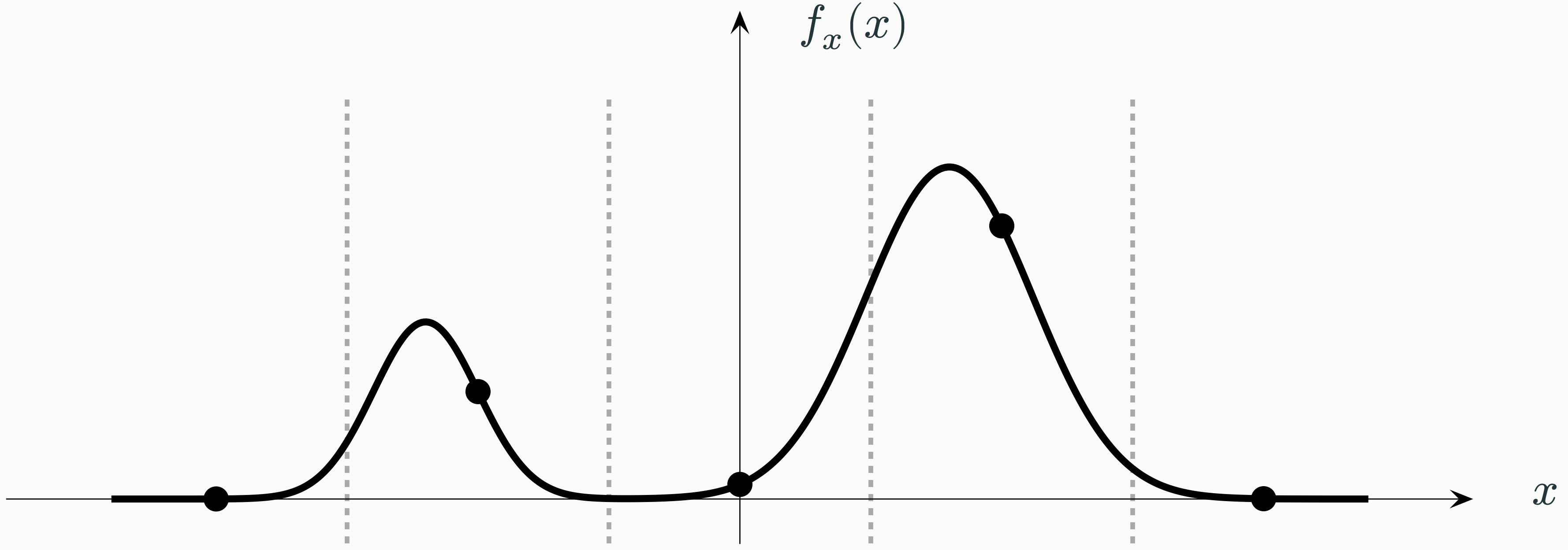
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.

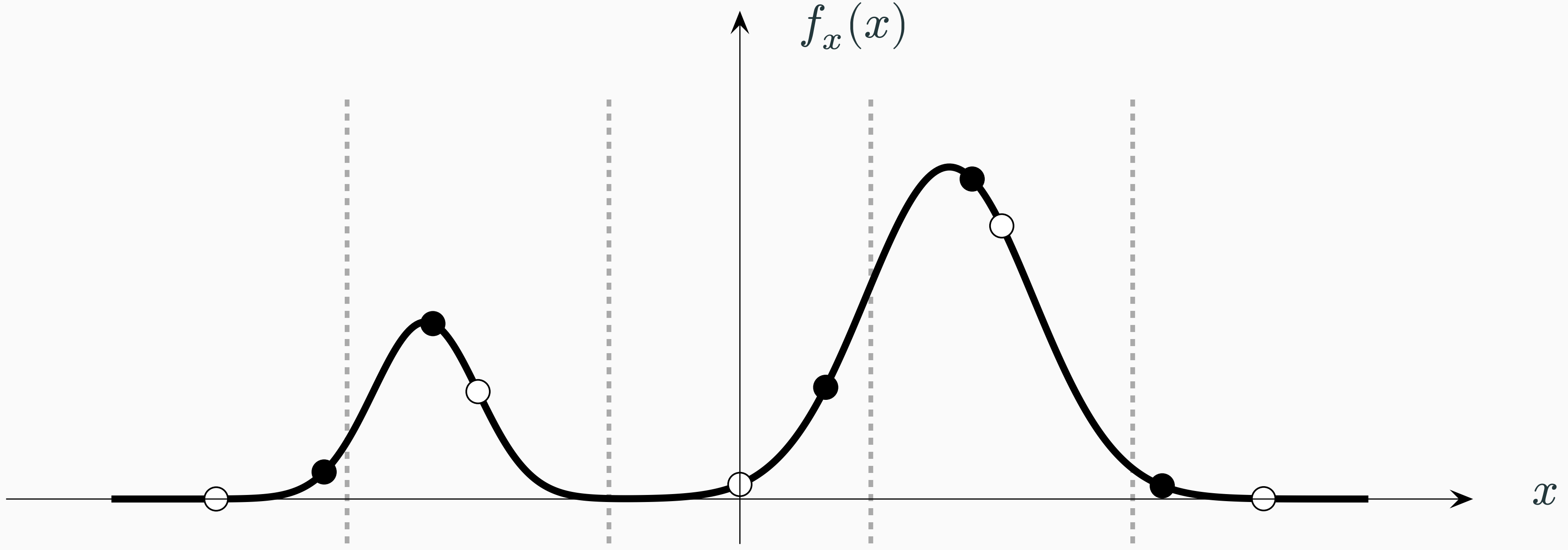
níveis $\rightarrow$ *limiares*



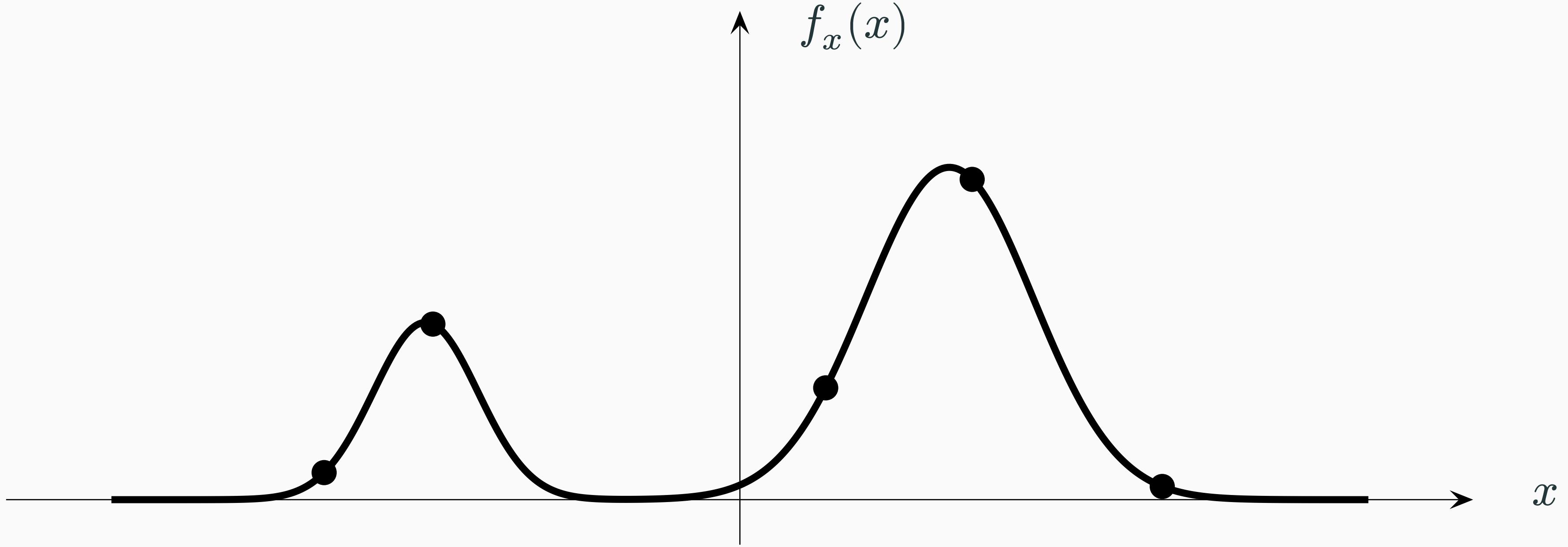
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.

limiares $\rightarrow$ *níveis*



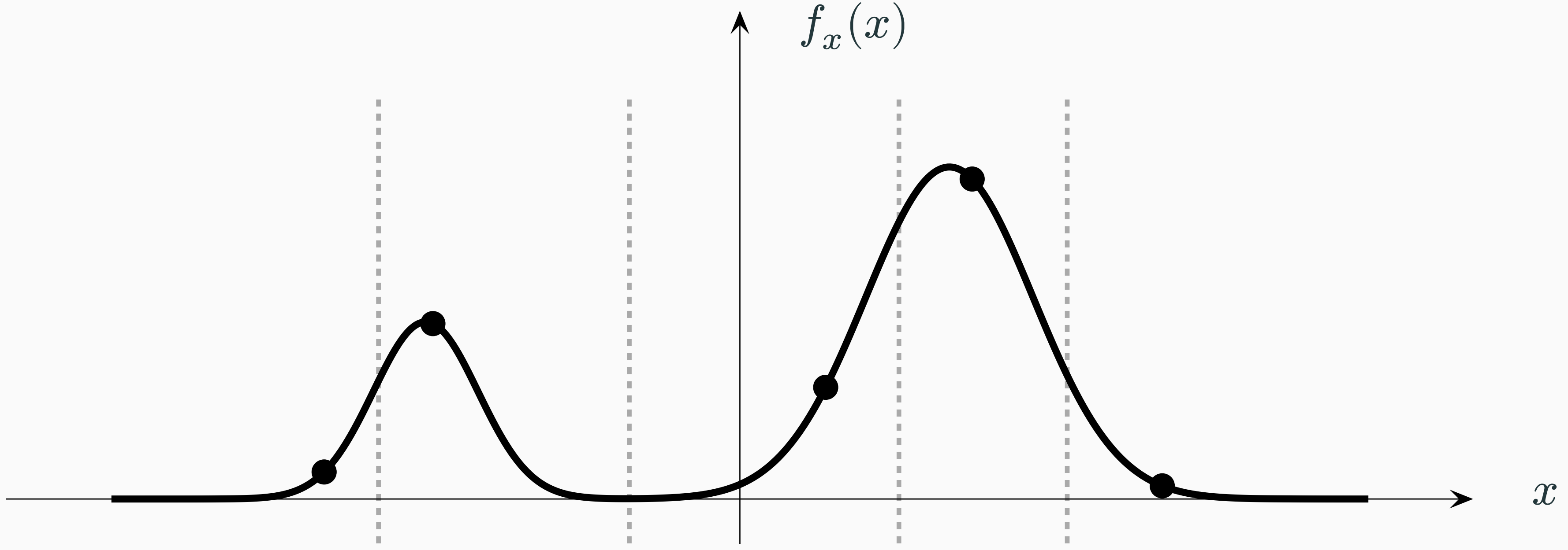
Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.

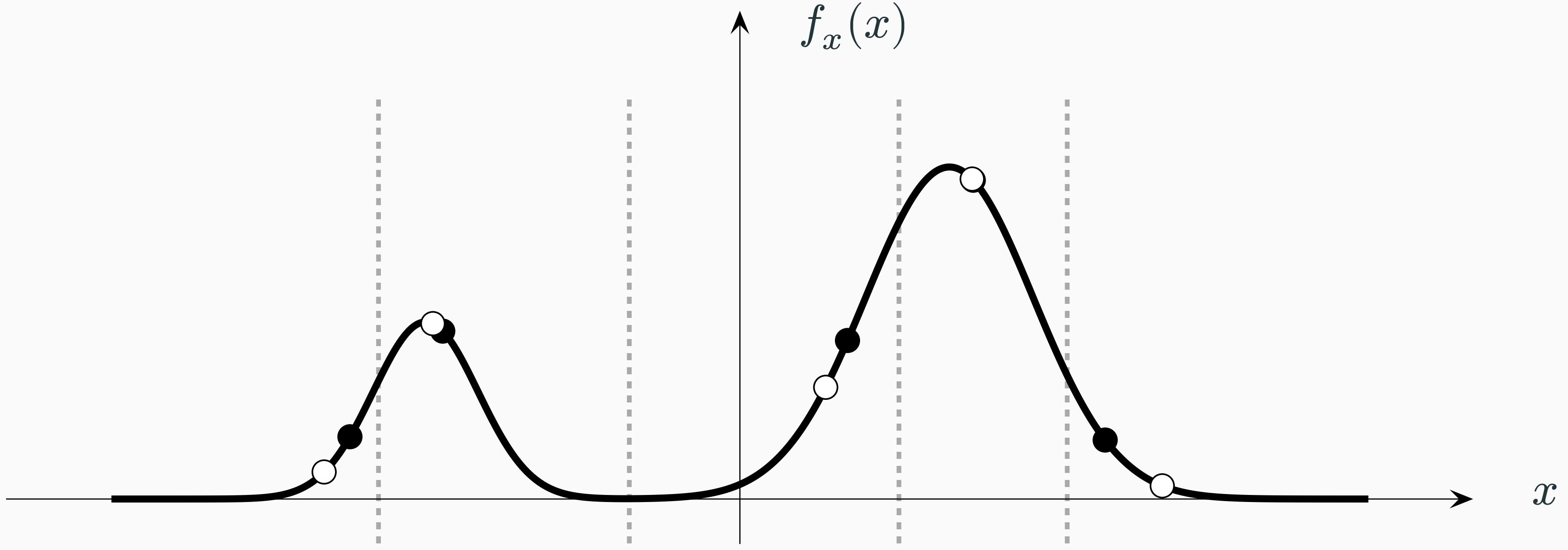
níveis $\rightarrow$ *limiares*



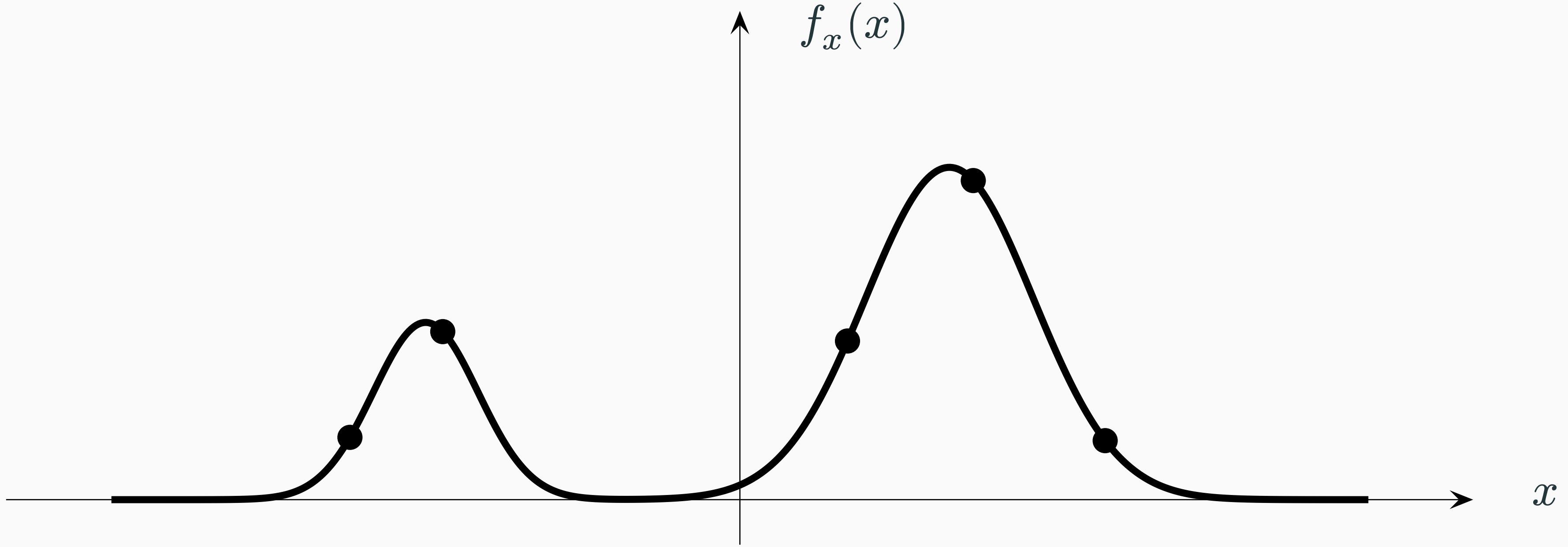
Ilustração

Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.

limiares $\rightarrow$ *níveis*



Exemplo para f_x mistura gaussiana e $L = 5$ níveis.



Observações

- O valor esperado condicional em (2) é calculado a partir de

$$\mathbb{E}[x \mid t_i \leq x < t_{i+1}] = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} x f_x(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} f_x(x)\,\mathrm{d}x}.$$

- O algoritmo *sempre* irá convergir em um número finito de passos.
  O erro quadrático médio ou decresce ou permanece igual; como é não-negativo, se aproxima de algum limite.
- No entanto, é possível que o algoritmo convirja para um mínimo local.
  Uma prática comum é executar o algoritmo várias vezes, partindo de escolhas de v's aleatórias e, ao final, manter a melhor solução.
- O algoritmo pode ser generalizado naturalmente para quantização vetorial.

Referências

Referências

[1] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.

[2] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.

[3] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.

[4] K. Sayood, *Introduction to Data Compression*, 3rd ed. Morgan Kaufmann, 2006.