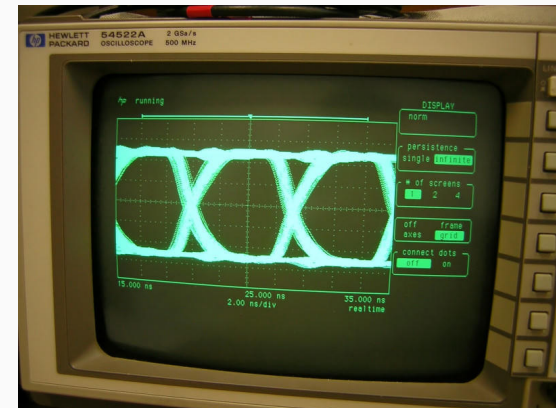


Sistemas de Comunicação I

Comunicação digital em banda base



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

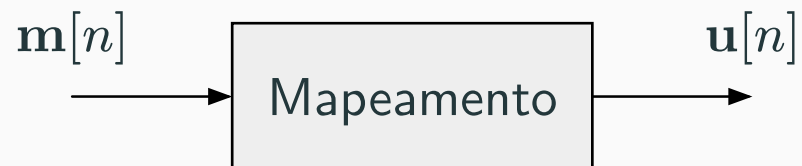
Instituto Federal de Santa Catarina

PAM digital

Introdução

A teoria PAM vista até agora permite que $\mathbf{u}[n]$ seja *qualquer sequência real*.

No caso do **PAM digital** considerado aqui, a sequência $\mathbf{u}[n]$ advém de uma sequência de índices $\mathbf{m}[n] \in [0 : M)$ através de um *mapeamento inversível sem memória*.



Nomenclatura:

- M : **ordem** da modulação;
- $\mathbf{m}[n]$: sequência de **mensagens**;
- $\mathbf{u}[n]$: sequência de **símbolos**.

O conjunto de todos os possíveis símbolos

$$\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{M-1}\},$$

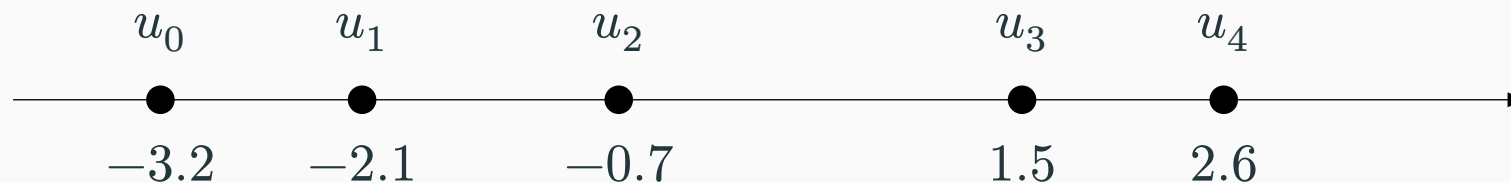
é chamado de **constelação** M -PAM.

Exemplo

Uma possível constelação 5-PAM é

$$u_0 = -3.2, u_1 = -2.1, u_2 = -0.7, u_3 = 1.5, u_4 = 2.6,$$

representada pelo diagrama abaixo.



Para comunicar a sequência de mensagens

$$\mathbf{m}[n] = [3, 4, 4, 0, \dots],$$

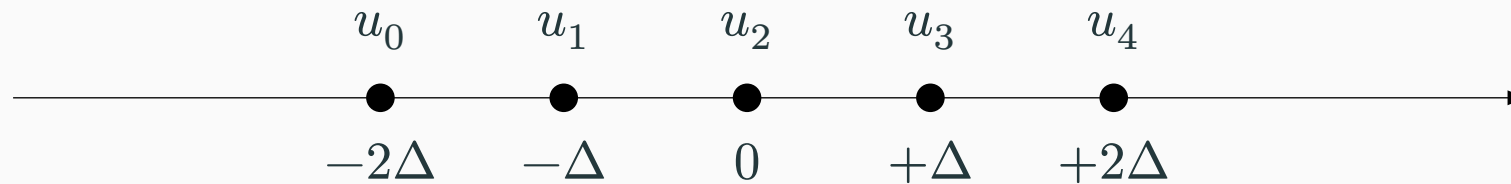
transmite-se pelo canal a sequência de símbolos

$$\mathbf{u}[n] = [1.5, 2.6, 2.6, -3.2, \dots],$$

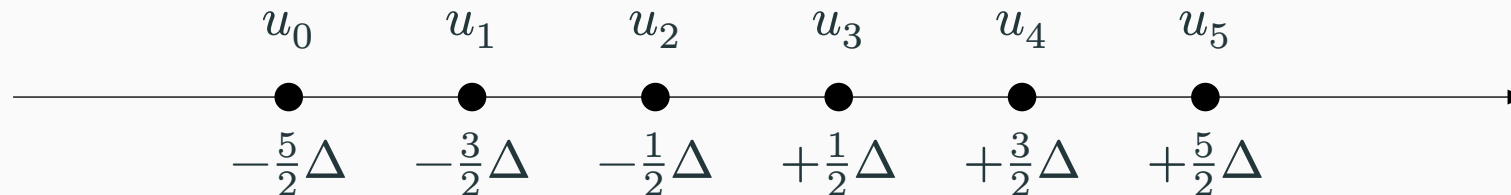
Constelação M -PAM uniforme

No caso mais comum de constelação M -PAM, os símbolos estão regularmente espaçados. O espaçamento entre dois símbolos consecutivos é denotado por Δ .

Exemplo: Constelação 5-PAM uniforme de média zero:



Exemplo: Constelação 6-PAM uniforme de média zero:



Média e energia de uma constelação

Suponha $\mathbf{m}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} p_{\mathbf{m}}$. A **média** de uma constelação $\mathcal{U} = \{u_0, u_1, \dots, u_{M-1}\}$ é definida por

$$\mu_s = \sum_{m=0}^{M-1} p_{\mathbf{m}}(m) u_m$$

e sua **energia de símbolo** é definida por

$$E_s = \sum_{m=0}^{M-1} p_{\mathbf{m}}(m) u_m^2.$$

No caso particular de mensagens equiprováveis,

$$\mu_s = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} u_m \quad \text{e} \quad E_s = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} u_m^2.$$

Suponha mensagens independentes e equiprováveis. Mostre que, para uma constelação M -PAM uniforme de média zero, a energia de símbolo é dada por

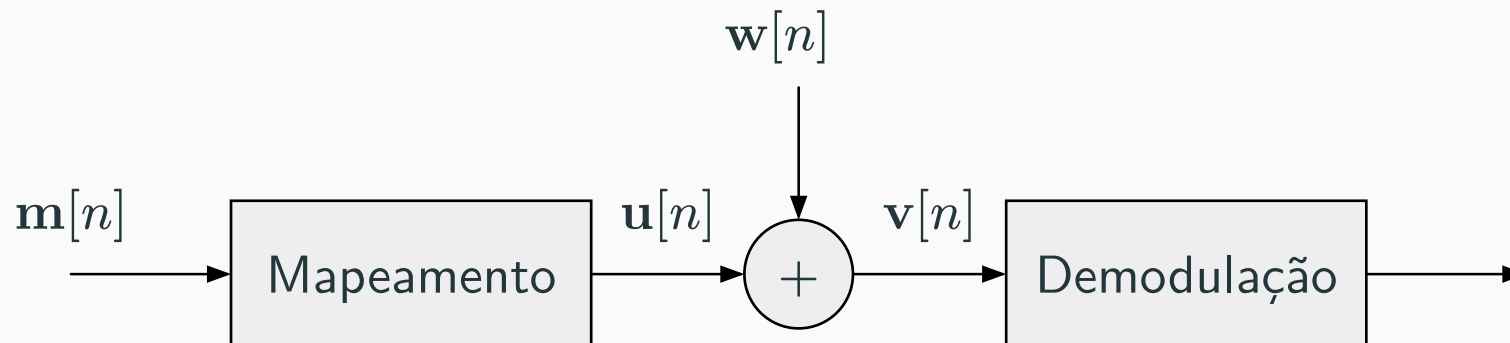
$$E_s = \frac{\Delta^2}{12}(M^2 - 1),$$

onde Δ é o espaçamento entre os símbolos.

Demodulação

Modelo matemático

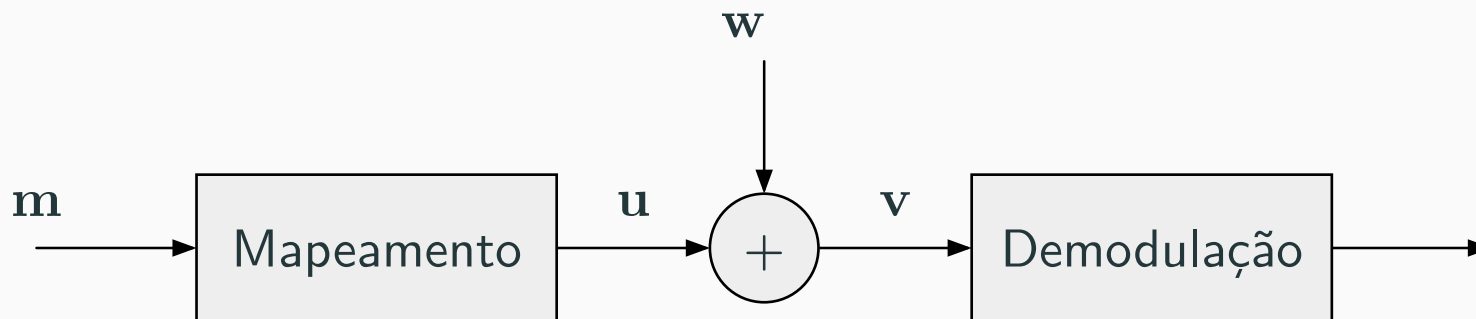
Considerando filtragem casada e pulso equivalente satisfazendo o critério de Nyquist, obtemos o modelo abaixo.



Lembre-se de que toda a parte de tempo contínuo foi abstraída no canal AWGN de tempo discreto.

Modelo matemático amostra-a-amostra

Se considerarmos $\mathbf{m}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} p_{\mathbf{m}}$ e, lembrando que $\mathbf{w}[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, N_0/2)$, o sistema pode ser analisado, sem perda de generalidade, *amostra-a-amostra*.



Para simplificar a notação: $\mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}[n]$, $\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}[n]$, e assim por diante.

Demodulação soft

O problema da **demodulação soft** consiste em, dadas:

- a distribuição a priori $p_{\mathbf{m}}(m)$ da mensagem $\mathbf{m}$; e
- a saída $\mathbf{v}$ do canal discreto;

determinar

- a distribuição a posteriori $p_{\mathbf{m}}(m \mid \mathbf{v})$ da mensagem $\mathbf{m}$ dado $\mathbf{v}$.

Observações:

- Trata-se de um problema de *inferência Bayesiana*.
- A resposta também irá depender da constelação $\mathcal{U}$ e do valor de N_0 .

Exercício

Considere um sistema de comunicação digital empregando 4-PAM uniforme com símbolos

$$u_0 = -3.0, \quad u_1 = -1.0, \quad u_2 = +1.0, \quad u_3 = +3.0.$$

Suponha que a distribuição a priori seja

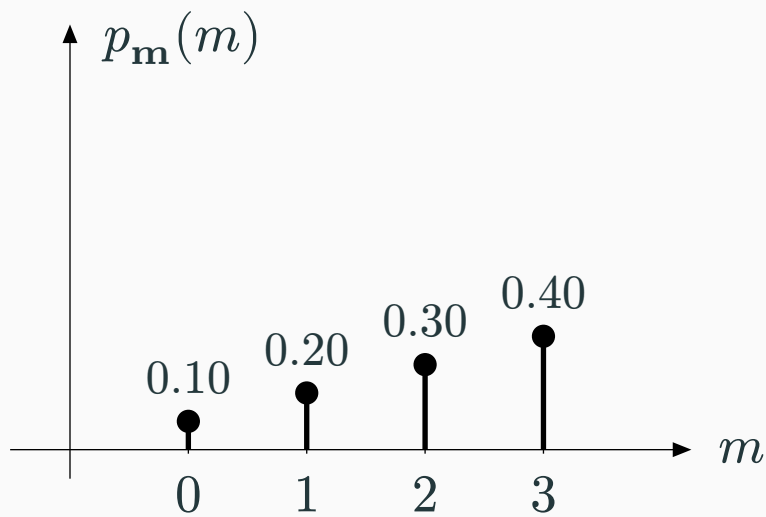
$$p_{\mathbf{m}} = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4].$$

Determine a distribuição a posteriori dado que foi recebido $\mathbf{v} = 1.5$ do canal AWGN discreto. Assuma (a) $N_0 = 4.0$; (b) $N_0 = 0.4$; (c) $N_0 = 40.0$.

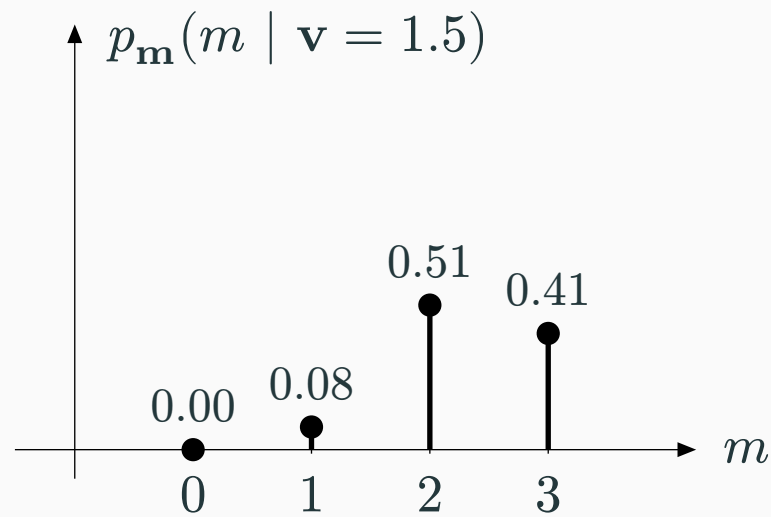
Exercício

Resposta:

(a)



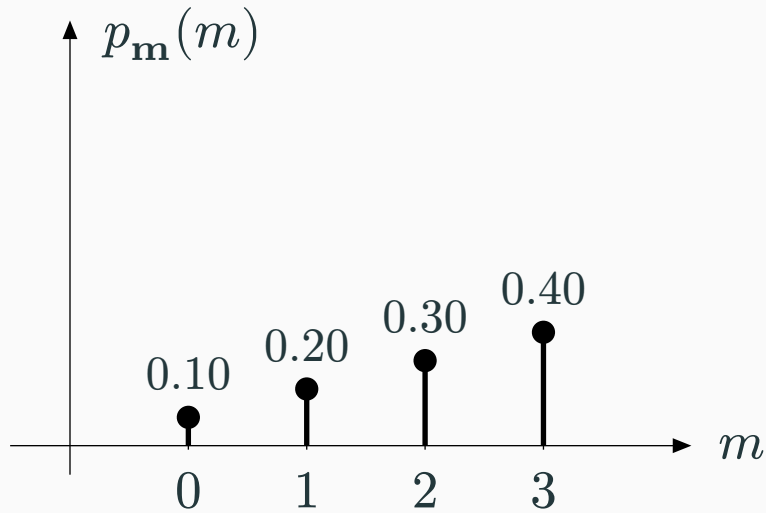
$\nless \mathbf{v} = 1.5$
 $\longrightarrow$
($N_0 = 4.0$)



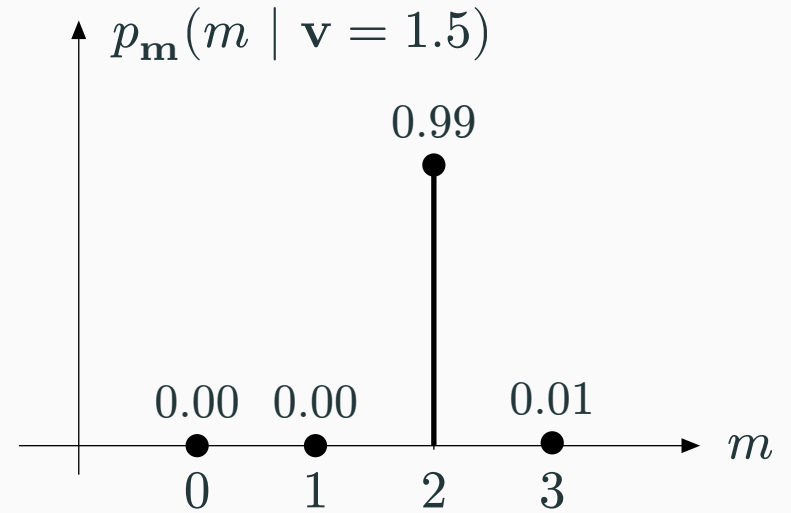
Exercício

Resposta:

(b)



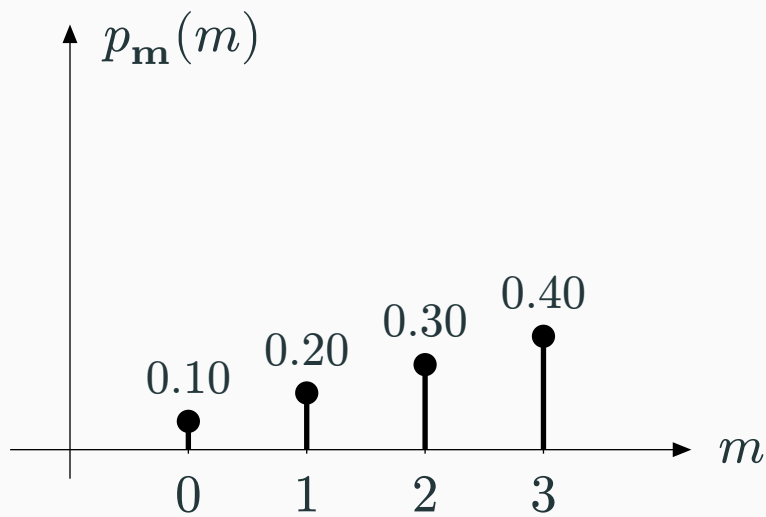
$\nless \mathbf{v} = 1.5$
 $\longrightarrow$
($N_0 = 0.4$)



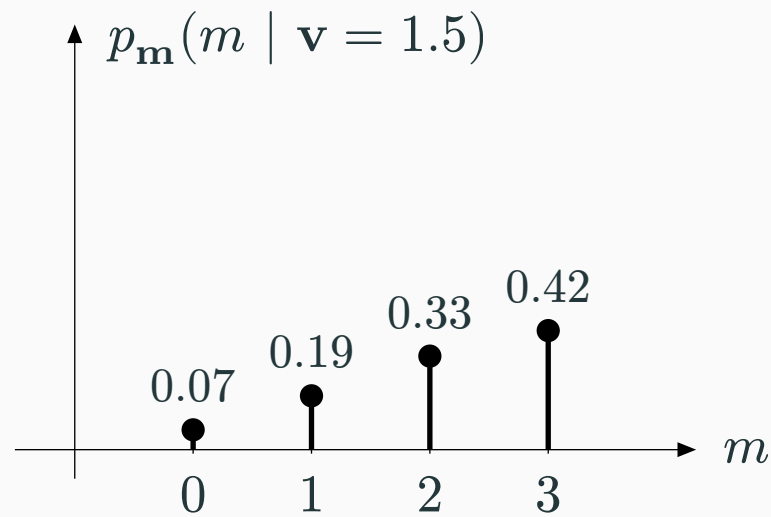
Exercício

Resposta:

(c)



$\nless \mathbf{v} = 1.5$
 $\longrightarrow$
($N_0 = 40.0$)



Determinação da distribuição a posteriori

Teorema. A distribuição a posteriori é determinada a partir de

$$p_{\mathbf{m}}(m \mid \mathbf{v} = v) \propto \exp \left[-\frac{(v - u_m)^2}{N_0} \right] p_{\mathbf{m}}(m).$$

Demonstração: Pelo teorema de Bayes,

$$p_{\mathbf{m}}(m \mid \mathbf{v} = v) = \frac{f_{\mathbf{v}}(v \mid \mathbf{m} = m) p_{\mathbf{m}}(m)}{f_{\mathbf{v}}(v)}.$$

O resultado segue sabendo que $(\mathbf{v} \mid \mathbf{m} = m) \sim \text{Normal}(u_m, N_0/2)$, ou seja

$$f_{\mathbf{v}}(v \mid \mathbf{m} = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp \left[-\frac{(v - u_m)^2}{N_0} \right],$$

e que $f_{\mathbf{v}}(v)$ é constante com m .



Demodulação hard

O problema da **demodulação hard** consiste em, dadas:

- a distribuição a priori $p_{\mathbf{m}}(m)$ da mensagem $\mathbf{m}$; e
- a saída $\mathbf{v}$ do canal discreto;

determinar

- a mensagem $\hat{\mathbf{m}}$ mais provável a posteriori.

Observações:

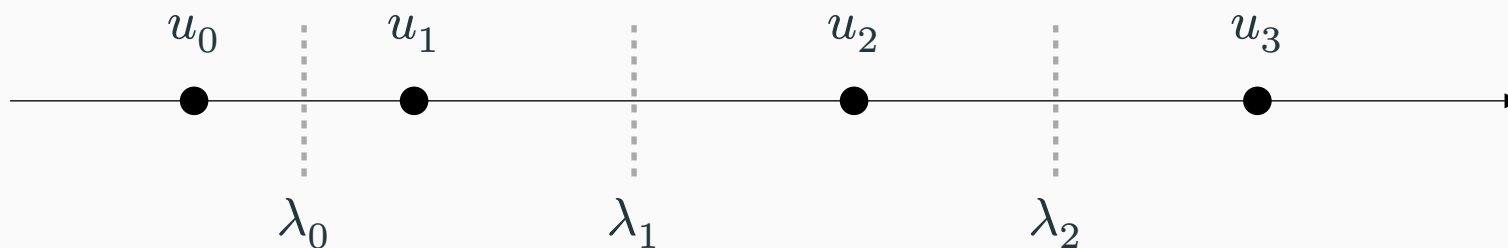
- Nesse caso, a demodulação hard também é chamada de **máximo a posteriori** (MAP).
- Dada a solução do problema de demodulação soft, a solução do problema de demodulação hard é trivial.

Caso com a priori uniforme

Teorema. Se $\mathbf{m}$ é uniforme sobre $[0 : M)$, então a mensagem mais provável a posteriori é

$$\hat{\mathbf{m}} = \underset{m}{\operatorname{argmin}} |v - u_m|.$$

Em outras palavras, o demodulador seleciona o símbolo que está *mais próximo* (no sentido da distância euclidiana) da saída do canal.



Observações:

- O demodulador acima é chamado de **demodulador de mínima distância euclidiana**.
- O demodulador de mínima distância euclidiana não faz uso do valor de N_0 .
- De modo geral (para a priori não uniforme), o demodulador de mínima distância euclidiana não é MAP.

Demonstração

Demonstração: Pelo teorema anterior, assumindo $\mathbf{m}$ uniforme,

$$p_{\mathbf{m}}(m \mid \mathbf{v} = v) \propto \exp \left[-\frac{(v - u_m)^2}{N_0} \right] p_{\mathbf{m}}(m) \propto \exp \left[-\frac{(v - u_m)^2}{N_0} \right].$$

Assim, maximizar $p_{\mathbf{m}}(m \mid \mathbf{v} = v)$ é equivalente a minimizar $|v - u_m|$. ■

Probabilidade de erro de símbolo

A **probabilidade de erro de símbolo** de um demodulador hard é definida por

$$P_s = \Pr[\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m}].$$

Além de depender do demodulador, a probabilidade de erro de símbolo depende também da distribuição a priori $p_{\mathbf{m}}$, da constelação $\mathcal{U}$ e do valor de N_0 .

No que segue, iremos supor distribuição a priori uniforme e demodulador de mínima distância euclidiana (que é MAP, nesse caso). Por simplicidade, iniciaremos com o caso 2-PAM e, em seguida, abordaremos o caso M -PAM uniforme.

Probabilidade de erro para constelação 2-PAM

Teorema. A probabilidade de erro de símbolo do demodulador de mínima distância euclidiana, supondo mensagens equiprováveis e constelação dada por $\mathcal{U} = \{u_0, u_1\}$, é

$$P_s = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{2N_0}}\right)$$

onde $\Delta = |u_1 - u_0|$ é a distância euclidiana entre os dois símbolos da constelação.

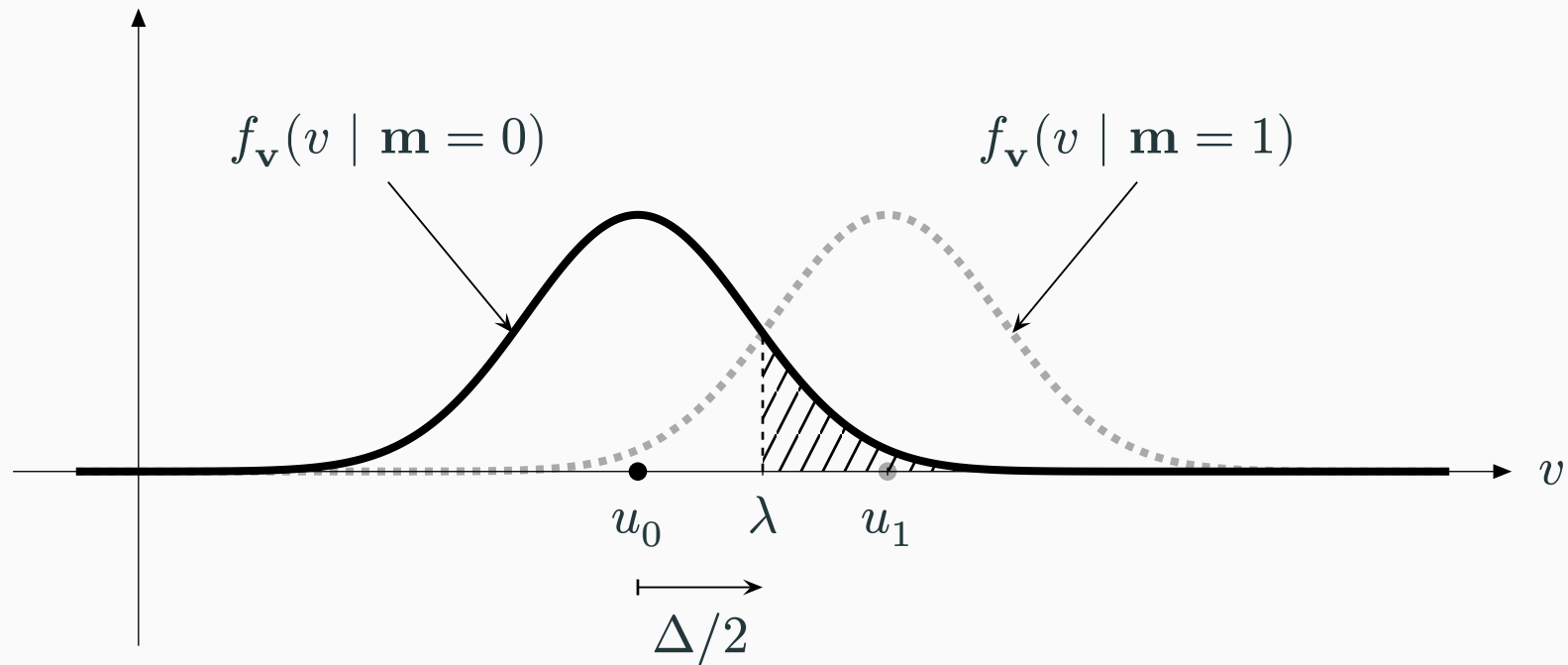
Observação: Dois casos particulares de importância são:

$$P_s = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \quad (\text{polar}) \quad \text{e} \quad P_s = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad (\text{unipolar}),$$

onde $E_s = (u_0^2 + u_1^2)/2$ é a energia média de símbolo.

Demonstração

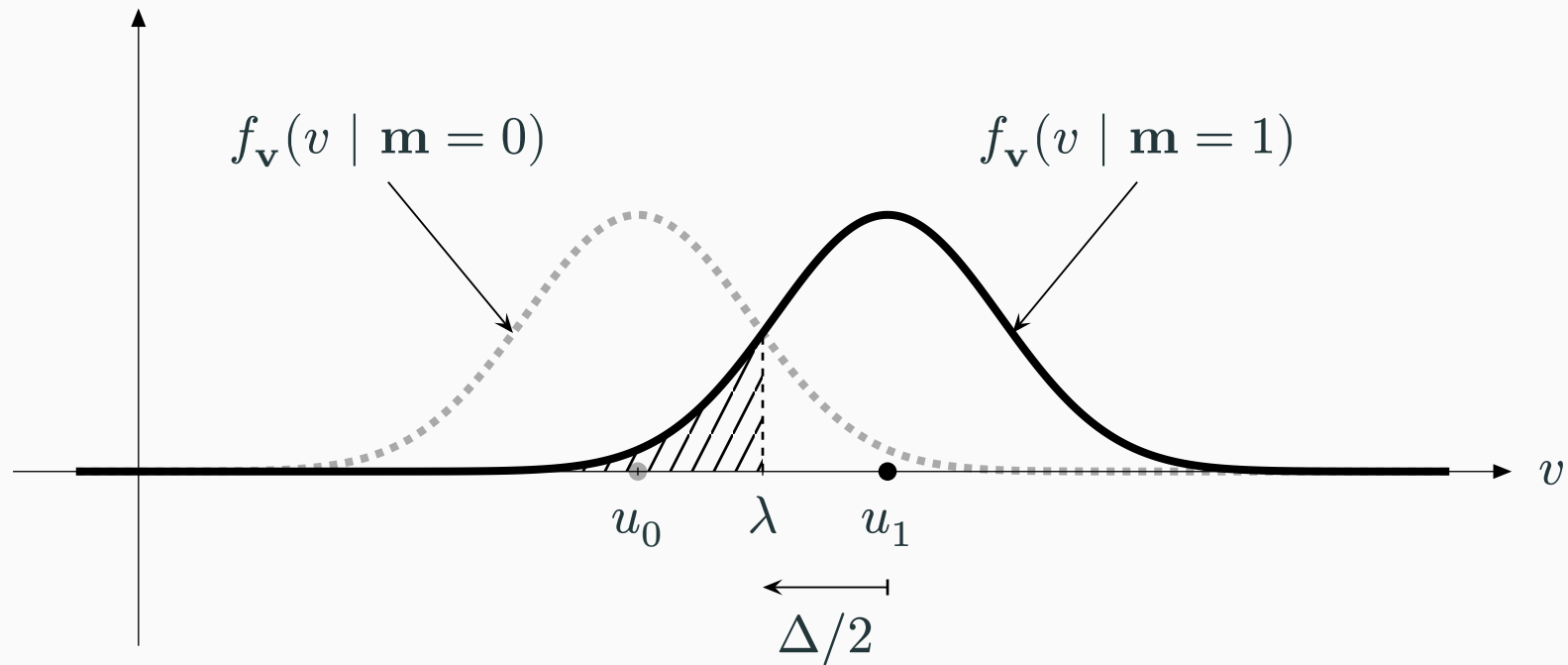
Seja $\Delta = |u_1 - u_0|$ o espaçamento entre símbolos e $\lambda = (u_0 + u_1)/2$ o *limiar de decisão*.



Temos $(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = 0) \iff v \geq \lambda \iff w \geq \Delta/2$.

Demonstração

Seja $\Delta = |u_1 - u_0|$ o espaçamento entre símbolos e $\lambda = (u_0 + u_1)/2$ o *limiar de decisão*.



Temos $(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = 1) \iff \mathbf{v} \leq \lambda \iff \mathbf{w} \leq -\Delta/2$.

Demonstração

Pelo teorema da probabilidade total, e sabendo que as mensagens são equiprováveis,

$$P_s = \Pr[\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m}] = \underbrace{\Pr[\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = 0]}_{\Pr[\mathbf{w} \geq \Delta/2]} \underbrace{\Pr[\mathbf{m} = 0]}_{1/2} + \underbrace{\Pr[\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = 1]}_{\Pr[\mathbf{w} \leq -\Delta/2]} \underbrace{\Pr[\mathbf{m} = 1]}_{1/2}.$$

Como $\mathbf{w} \sim \text{Normal}(0, N_0/2)$, temos

$$\Pr[\mathbf{w} \geq \Delta/2] = \Pr[\mathbf{w} \leq -\Delta/2] = Q\left(\frac{\Delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{2N_0}}\right),$$

de onde segue o resultado. ■

Exercício

- (a) Determine a probabilidade de erro de bit de um sistema de comunicação que transmite bits equiprováveis à taxa de 10 kbit/s utilizando código de linha polar NRZ com tensões ± 2 V.
- (b) Um sistema de comunicação transmite bits equiprováveis utilizando código de linha unipolar RZ com tensões 0 e 10 V. Determine a máxima taxa de bits possível de modo que se tenha uma probabilidade de erro de bit de no máximo 1%.

Considere $N_0 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

Exercício

- (a) Determine a probabilidade de erro de bit de um sistema de comunicação que transmite bits equiprováveis à taxa de 10 kbit/s utilizando código de linha polar NRZ com tensões ± 2 V.
- (b) Um sistema de comunicação transmite bits equiprováveis utilizando código de linha unipolar RZ com tensões 0 e 10 V. Determine a máxima taxa de bits possível de modo que se tenha uma probabilidade de erro de bit de no máximo 1%.

Considere $N_0 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

Respostas:

- (a) $\mathcal{U} = \{-0.02, +0.02\}$ e $P_b = 2.28\%$.
- (b) $\mathcal{U} = \{0, 0.0465\}$ e $R_b = 23.1 \text{ kbit/s}$.

Probabilidade de erro para constelação M -PAM uniforme

Teorema. A probabilidade de erro de símbolo do demodulador de mínima distância euclidiana, supondo mensagens equiprováveis e constelação M -PAM uniforme, é

$$P_s = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{2N_0}} \right),$$

onde Δ é o espaçamento entre os símbolos.

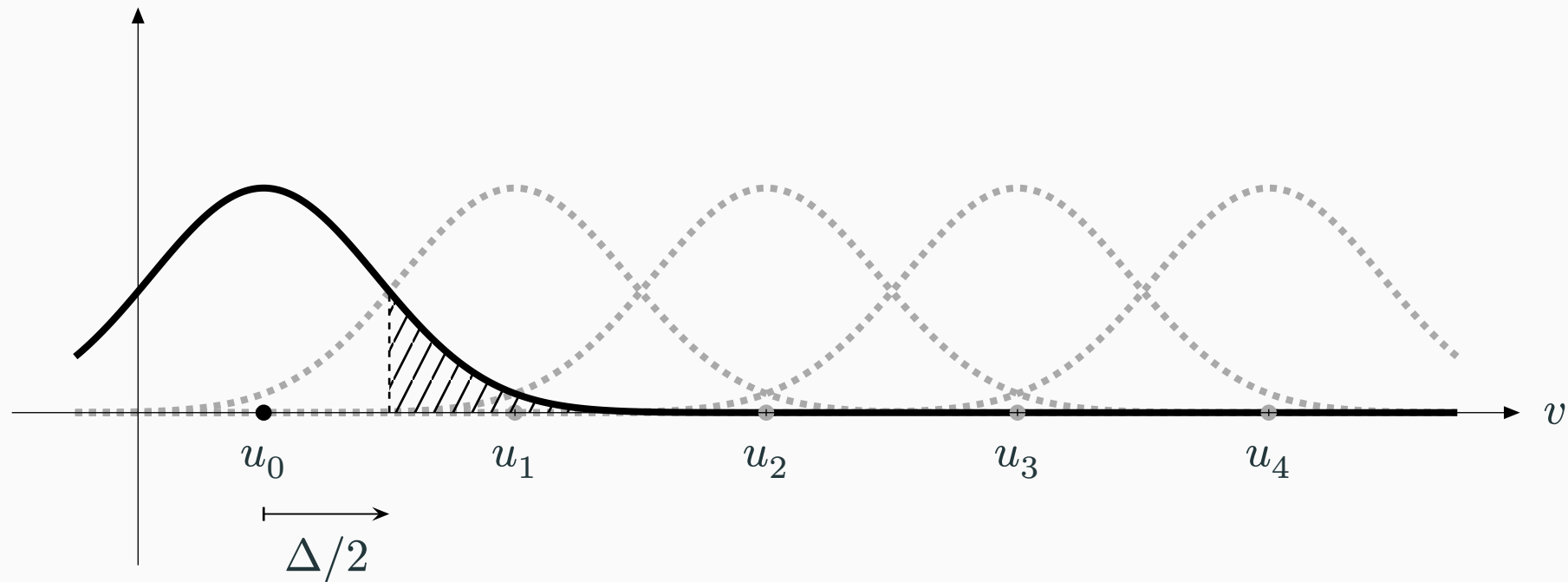
Observação: Para o caso de média zero, temos

$$P_s = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6E_s}{(M^2-1)N_0}} \right),$$

onde E_s é a energia média de símbolo.

Demonstração

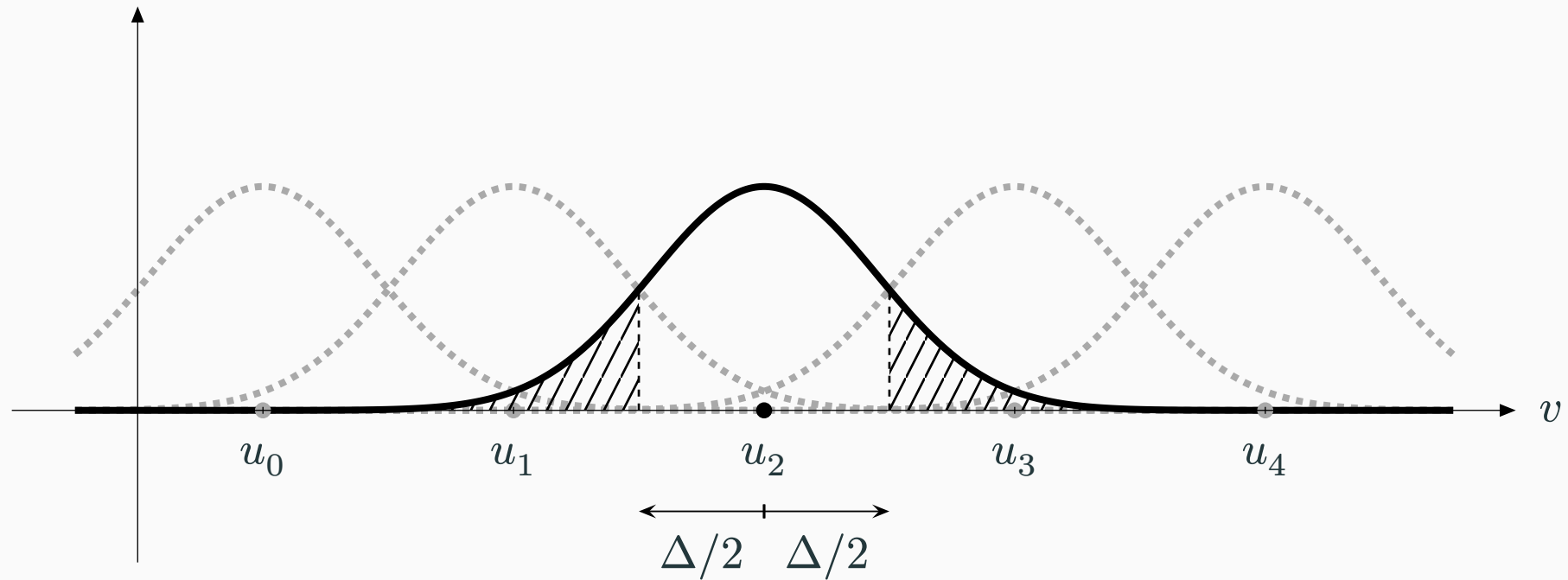
Seja Δ o espaçamento entre os símbolos.



Para o símbolo mais à esquerda: $(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = 0) \iff \mathbf{w} \geq \Delta/2$.

Demonstração

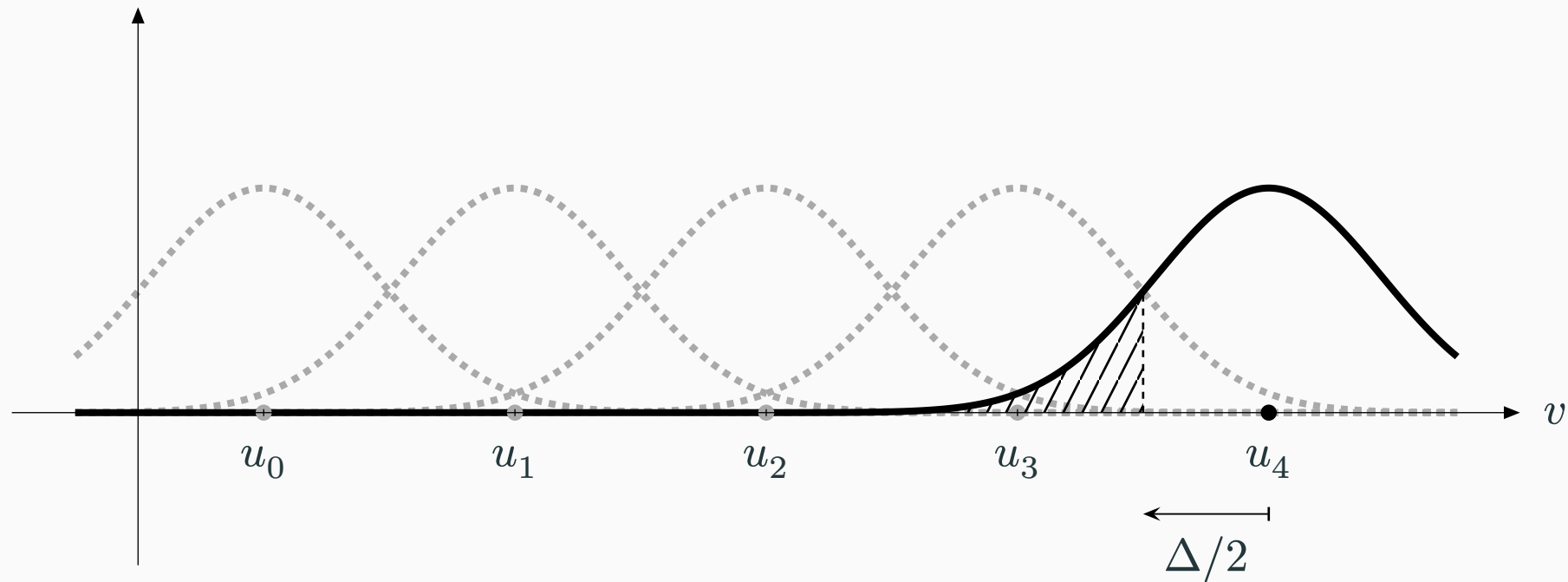
Seja Δ o espaçamento entre os símbolos.



Para os símbolos centrais: $(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = m) \iff \mathbf{w} \leq -\Delta/2 \vee \mathbf{w} \geq \Delta/2$.

Demonstração

Seja Δ o espaçamento entre os símbolos.



Para o símbolo mais à direita: $(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = M - 1) \iff \mathbf{w} \leq -\Delta/2$.

Demonstração

Temos:

$$(\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m} \mid \mathbf{m} = m) \iff \begin{cases} \mathbf{w} \geq \Delta/2, & \text{para } m = 0, \\ \mathbf{w} \leq -\Delta/2 \vee \mathbf{w} \geq \Delta/2, & \text{para } m = 1, \dots, M-2, \\ \mathbf{w} \leq -\Delta/2, & \text{para } m = M-1; \end{cases}$$

$$\Pr[\mathbf{w} \geq \Delta/2] = \Pr[\mathbf{w} \leq -\Delta/2] = Q\left(\frac{\Delta/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{2N_0}}\right).$$

Assim, pelo teorema da probabilidade total,

$$P_s = \Pr[\hat{\mathbf{m}} \neq \mathbf{m}] = Q(\dots)\frac{1}{M} + 2Q(\dots)\frac{M-2}{M} + Q(\dots)\frac{1}{M} = \frac{2(M-1)}{M}Q(\dots),$$

de onde segue o resultado.



Exercício

Determine a probabilidade de erro de símbolo de um sistema de comunicação que transmite símbolos equiprováveis à taxa de 250 kbaud utilizando PAM digital com pulso retangular NRZ de tensões $\pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5 \pm 3.5$ V. Considere $N_0 = 800 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

Resposta:

$$\mathcal{U} = \{\pm 0.001, \pm 0.003, \pm 0.005, \pm 0.007\} \text{ e } P_s = 9.96\%.$$

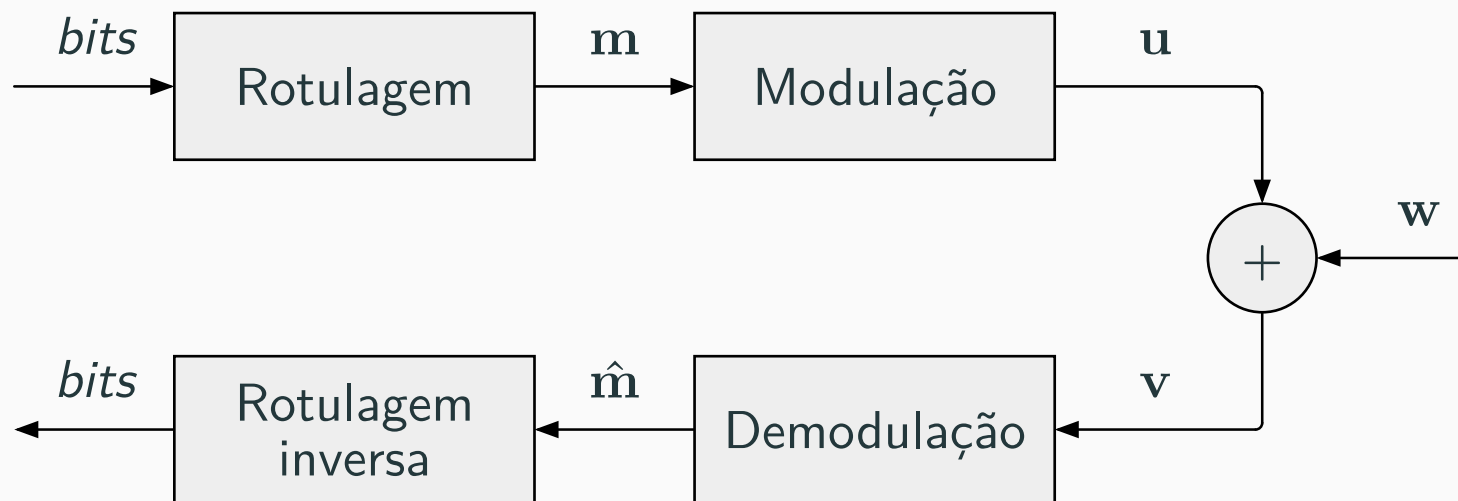
Transmissão de bits com M -PAM

Modelo matemático

Na prática, deseja-se comunicar bits, mesmo no caso $M > 2$.

Quando a ordem da modulação é uma potência de dois, ou seja, $M = 2^k$, cada mensagem é capaz de representar $k = \log_2 M$ bits.

No caso de *demodulação hard*, o modelo do sistema fica como abaixo.



Rotulagem natural

Na **rotulagem natural**, cada índice m é representado pela sua expansão binária posicional.

m	$bits$
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Rotulagem espelhada (mapeamento Gray)

A **rotulagem espelhada** pode ser construída recursivamente.

<i>m</i>	<i>bits</i>
0	0
1	1

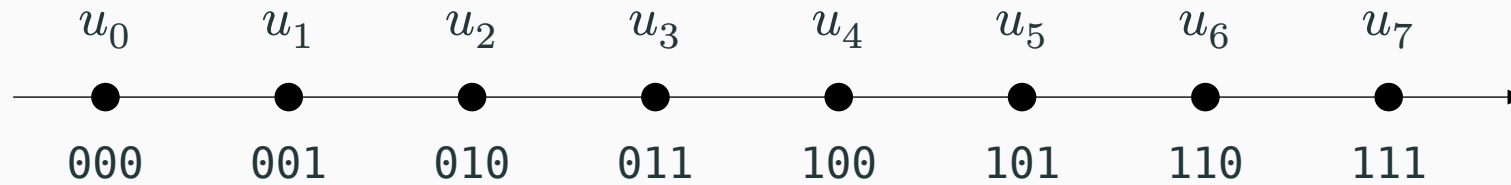
<i>m</i>	<i>bits</i>
0	00
1	01
2	11
3	10

<i>m</i>	<i>bits</i>
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

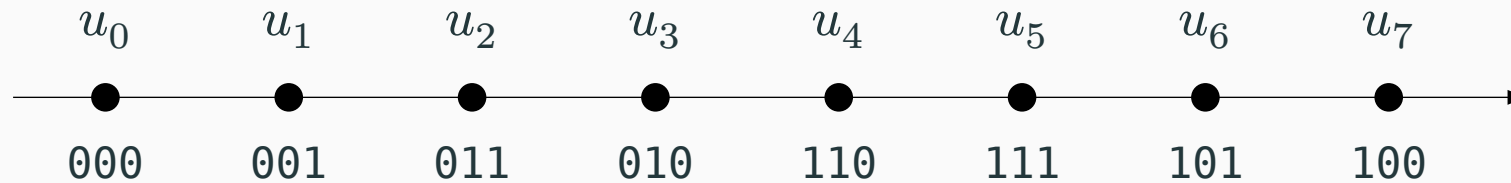
Propriedade: Símbolos vizinhos possuem rótulos binários que diferem de apenas um bit.

Comparação entre as rotulagens

Rotulagem natural



Rotulagem espelhada (Gray)



Relação entre grandezas de bits e grandezas de símbolos

- O intervalo de bit e a intervalo de símbolo se relacionam por

$$T_b = \frac{T_s}{k}.$$

- A taxa de bits e a taxa de símbolos se relacionam por

$$R_b = kR_s.$$

- A energia média de bit e a energia média de símbolo se relacionam por

$$E_b = \frac{E_s}{k}.$$

A probabilidade de erro de bit é definida por

$$P_b = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \Pr[\hat{\mathbf{b}}_i \neq \mathbf{b}_i]$$

e depende da rotulagem utilizada. No entanto, independentemente da rotulagem, temos

$$\frac{P_s}{k} \leq P_b \leq P_s.$$

O limite inferior é aproximadamente alcançado no caso de rotulagem Gray e alta SNR:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} \quad (\text{Gray, alta SNR}).$$

Exercício

Determine as probabilidades de erro de símbolo e de bit de um sistema de comunicação que transmite bits equiprováveis à taxa de 200 kbit/s utilizando modulação 4-PAM com pulso retangular RZ de amplitudes ± 1 e ± 3 V e rotulagem Gray. Considere $N_0 = 10^{-5} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

Exercício

Determine as probabilidades de erro de símbolo e de bit de um sistema de comunicação que transmite bits equiprováveis à taxa de 200 kbit/s utilizando modulação 4-PAM com pulso retangular RZ de amplitudes ± 1 e ± 3 V e rotulagem Gray. Considere $N_0 = 10^{-5} \text{ V}^2/\text{Hz}$.

Resposta: $P_s = 0.238$ e $P_b = 0.119$.

Referências

- [1] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed. McGraw Hill, 2008.