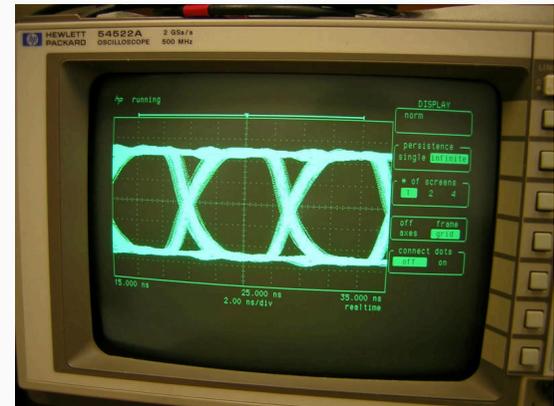


Sistemas de Comunicação I

Comunicação em banda base



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Modulação por amplitude de pulso

Modulador por amplitude de pulso



$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[n]p(t - nT_s)$$

Entrada:

- $u[n]$: sequência de números reais.

Saída:

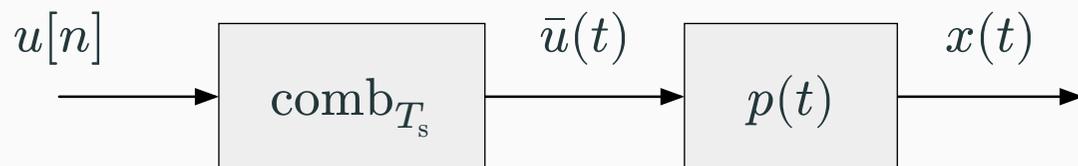
- $x(t)$: sinal modulado em PAM.

Parâmetros:

- T_s : intervalo de símbolo (s).
- $R_s = 1/T_s$: taxa de símbolos (símbolos/s $\stackrel{\text{def}}{=} \text{baud}$).
- $p(t)$: pulso de formatação.

Modelo matemático alternativo

Do ponto de vista matemático (e também de simulação), é útil separar o modulador conforme as duas etapas abaixo.



De fato,

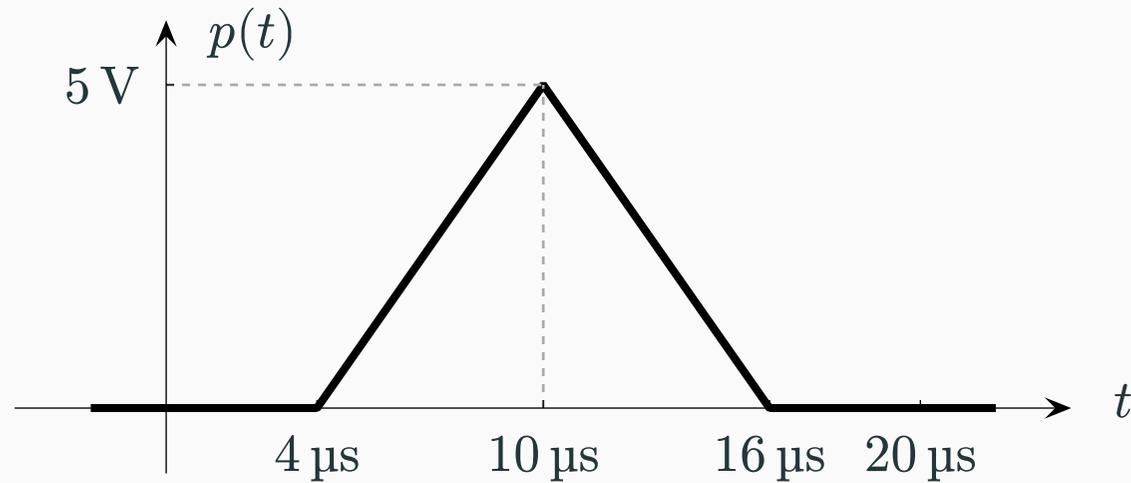
$$\bar{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[n] \delta(t - nT_s)$$

e, portanto,

$$x(t) = p(t) \star \bar{u}(t) = p(t) \star \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[n] \delta(t - nT_s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[n] p(t - nT_s).$$

Exercício

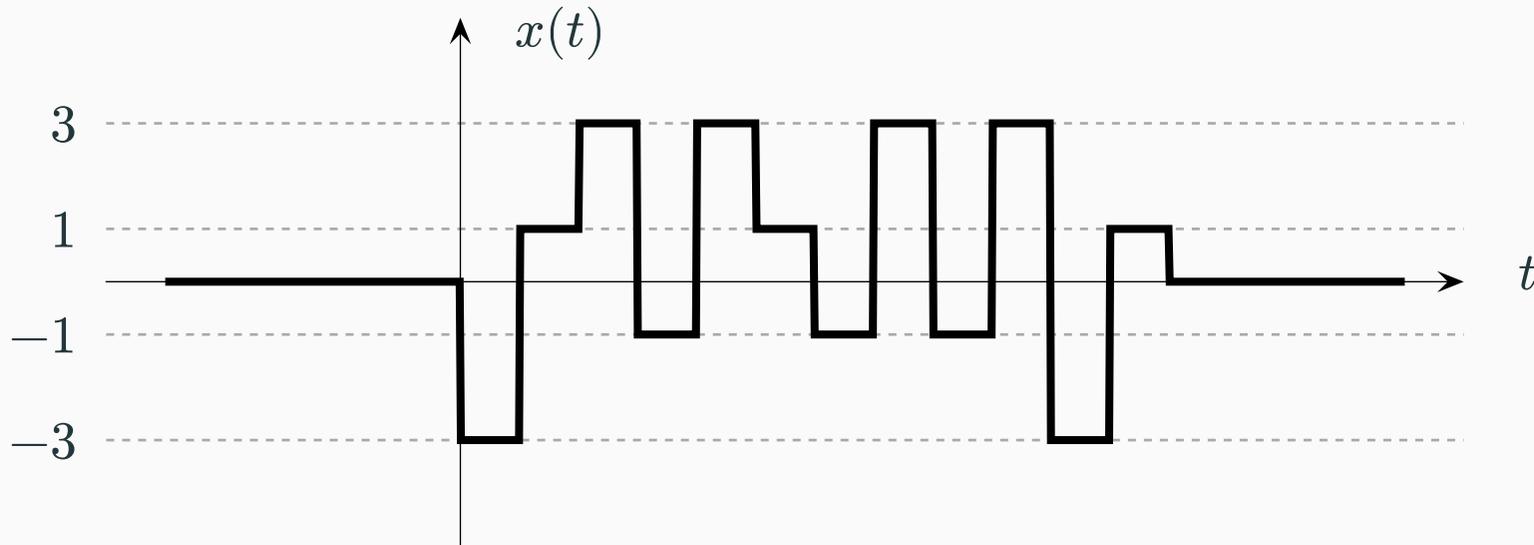
Seja $R_s = 50$ kbaud e $p(t)$ como abaixo. Esboce o sinal $x(t)$ modulado em PAM correspondente à sequência de entrada $u[n] = [0.4, -0.1, -0.5, 0.8, -0.2]$.



Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

- Pulso retangular.



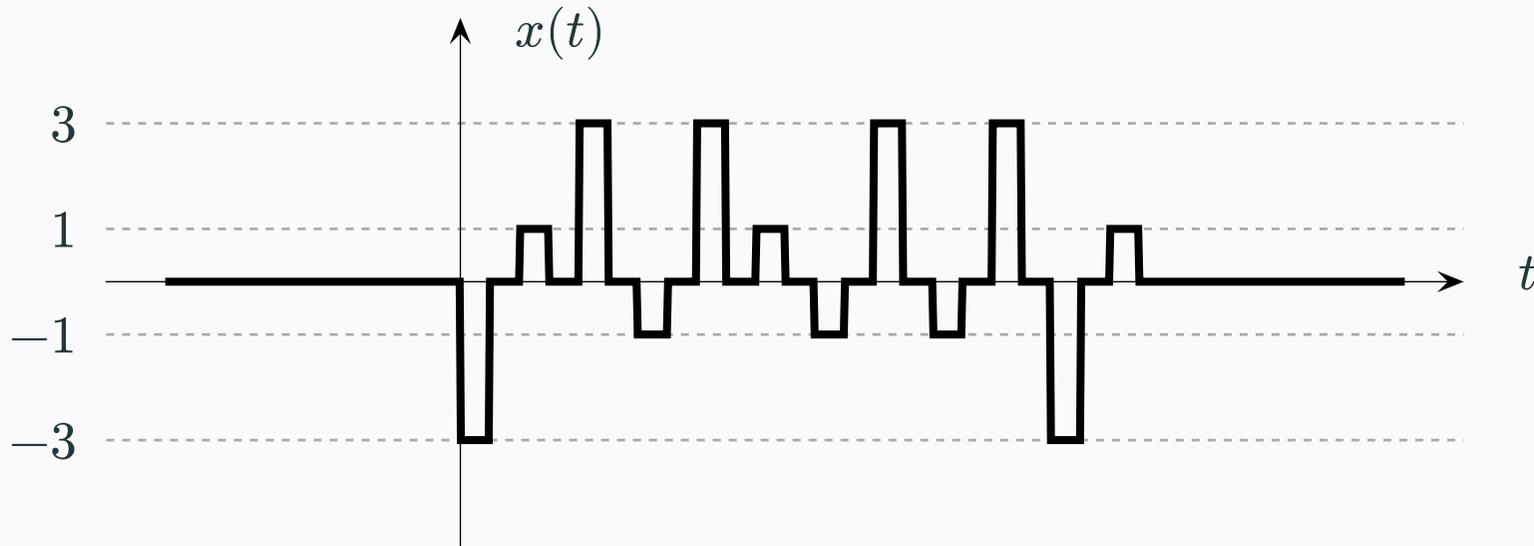
- Pulso sinc.

No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

- Pulso retangular.



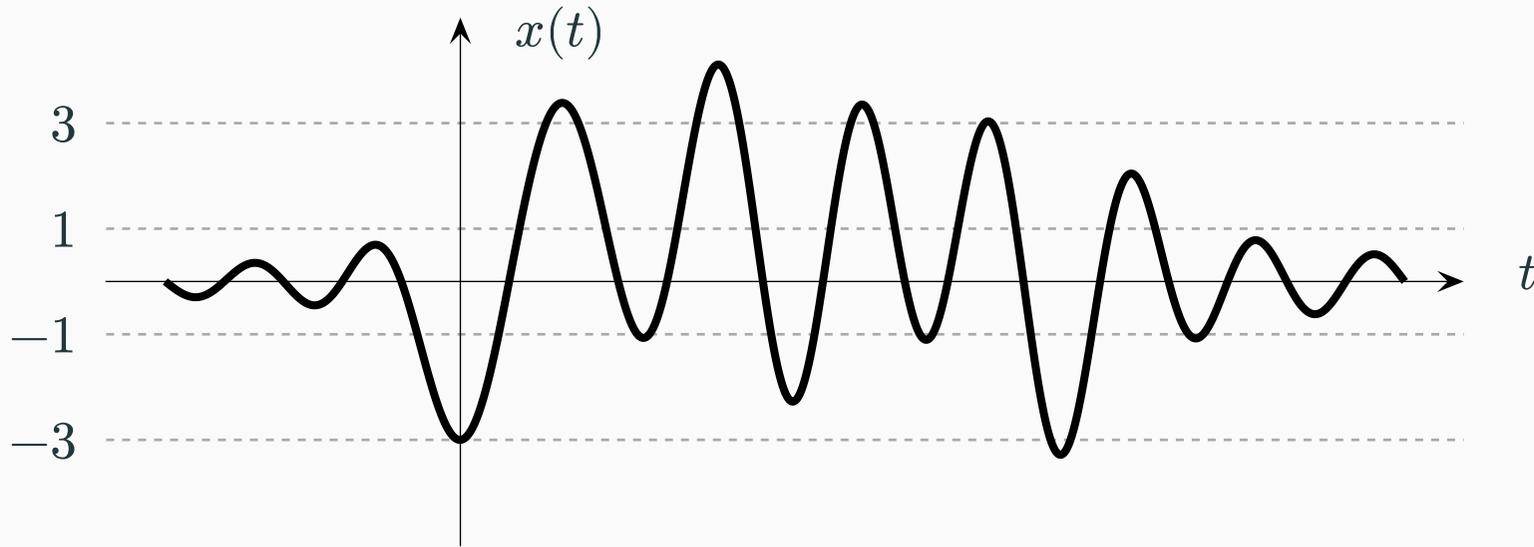
- Pulso sinc.

No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

Possíveis escolhas de pulsos

A escolha do pulso $p(t)$ depende da aplicação. Algumas opções são:

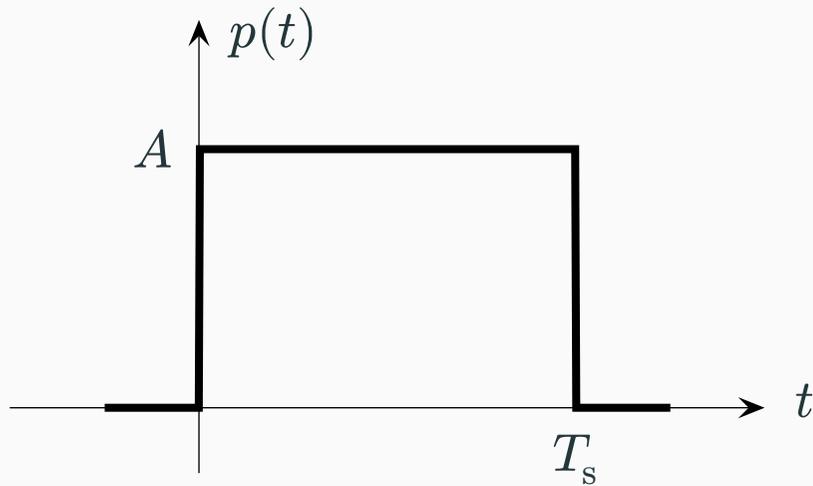
- Pulso retangular.
- Pulso sinc.



No decorrer da disciplina encontraremos outros pulsos.

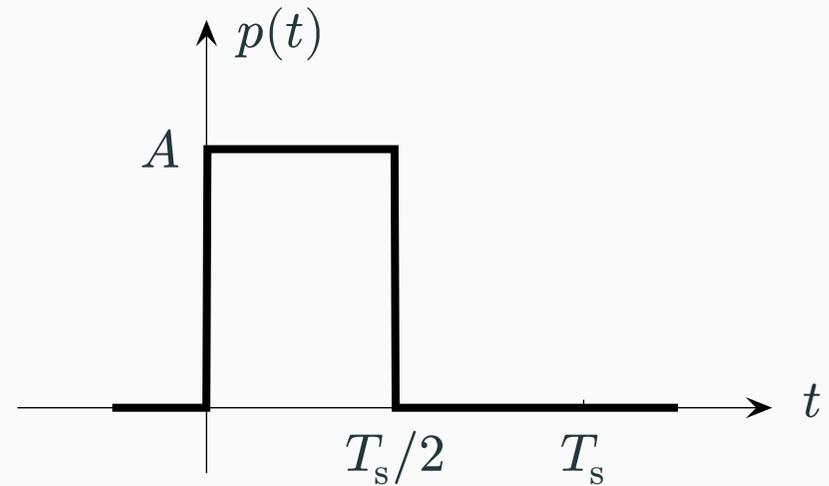
Pulso retangular

Retangular NRZ (*non-return-to-zero*)



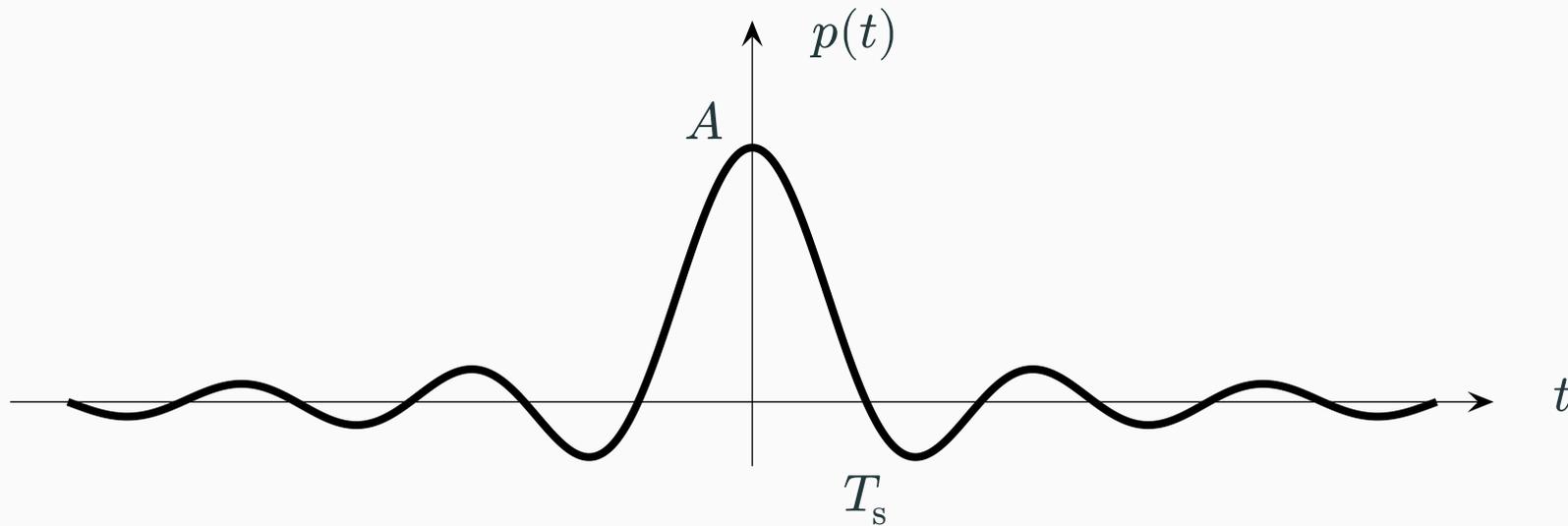
$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right)$$

Retangular RZ (*return-to-zero*)



$$p(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_s/4}{T_s/2}\right)$$

Pulso sinc



$$p(t) = A \operatorname{sinc}(t/T_s)$$

O pulso sinc tem duração ilimitada, mas espectro limitado.

Teorema: Densidade espectral de potência de um sinal PAM

Seja $u[n]$ é um processo estocástico de tempo discreto, estacionário no sentido amplo, com média μ_u e função autocovariância $C_u[\ell]$. Então o sinal PAM

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u[n]p(t - nT_s)$$

é *cicloestacionário no sentido amplo*, com densidade espectral de potência dada por

$$S_x(f) = \frac{1}{T_s} |P(f)|^2 S_u(T_s f),$$

onde

- $P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ é o espectro de $p(t)$;
- $S_u(\phi) = \mathcal{F}\{C_u[\ell] + \mu_u^2\}$ é a densidade espectral de potência de $u[n]$.

Para mais detalhes, veja [1, Sec 3.4].

Exercício

Determine a densidade espectral de potência do sinal PAM resultante $x(t)$ considerando

(a) $u[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(\{\pm 1, \pm 3\})$, com $p(t)$ pulso retangular NRZ.

(b) $u[n] = w[n] + w[n - 1]$, onde $w[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$, com $p(t)$ pulso sinc.

Exercício

Determine a densidade espectral de potência do sinal PAM resultante $x(t)$ considerando

(a) $u[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}(\{\pm 1, \pm 3\})$, com $p(t)$ pulso retangular NRZ.

(b) $u[n] = w[n] + w[n - 1]$, onde $w[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$, com $p(t)$ pulso sinc.

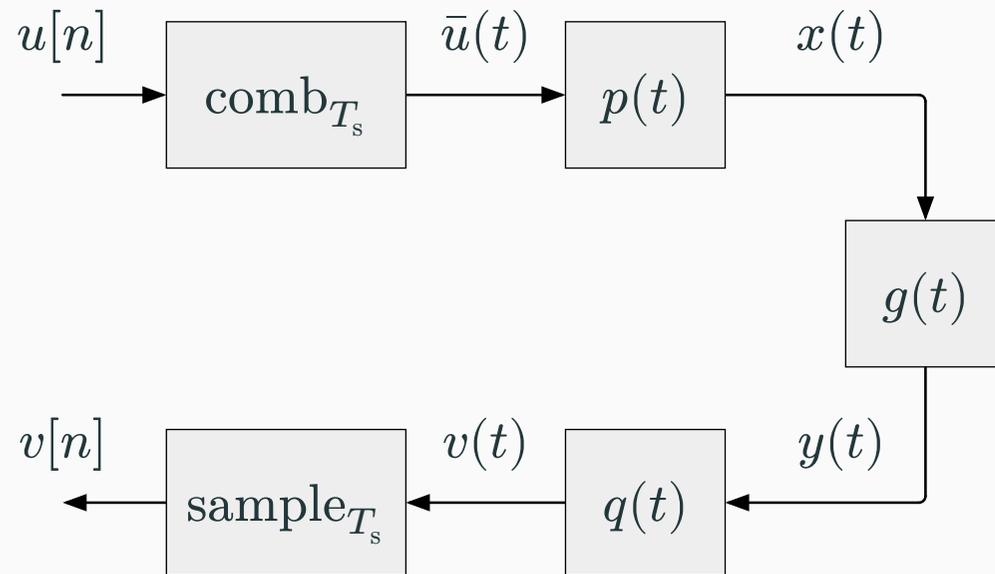
Respostas:

(a) $S_x(f) = 5A^2T_s \text{sinc}^2(T_s f)$.

(b) $S_x(f) = 4A^2T_s \cos^2(\pi T_s f) \text{rect}(T_s f)$.

Canal com resposta limitada em frequência

Assumiremos agora um canal com **resposta limitada em frequência** e ausência de ruído.



Sinais envolvidos:

- $u[n]$: sequência de entrada.
- $x(t)$: sinal enviado (PAM).
- $y(t)$: sinal recebido.
- $v[n]$: sequência de saída.

Pulsos:

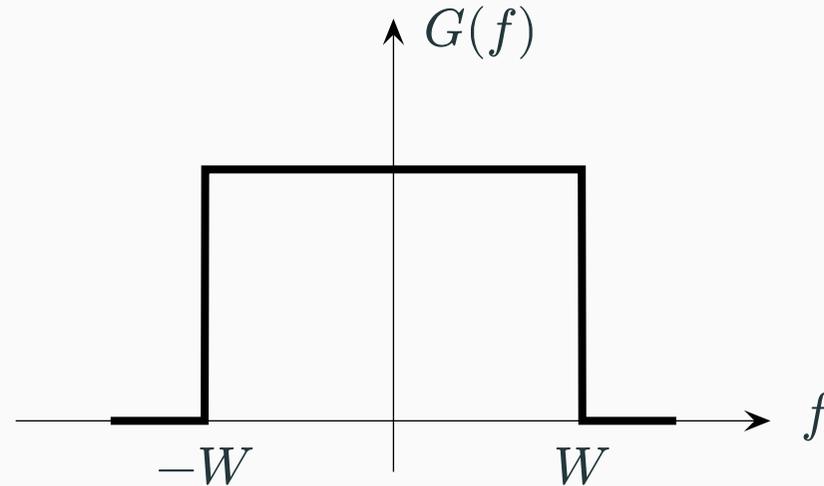
- $p(t)$: pulso de transmissão.
- $g(t)$: resposta ao impulso do canal.
- $q(t)$: pulso de recepção.

Modelo da resposta em frequência do canal

O canal será modelado por um sistema LTI com resposta em frequência dada por

$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right),$$

onde W é a largura de banda do canal.



Observações

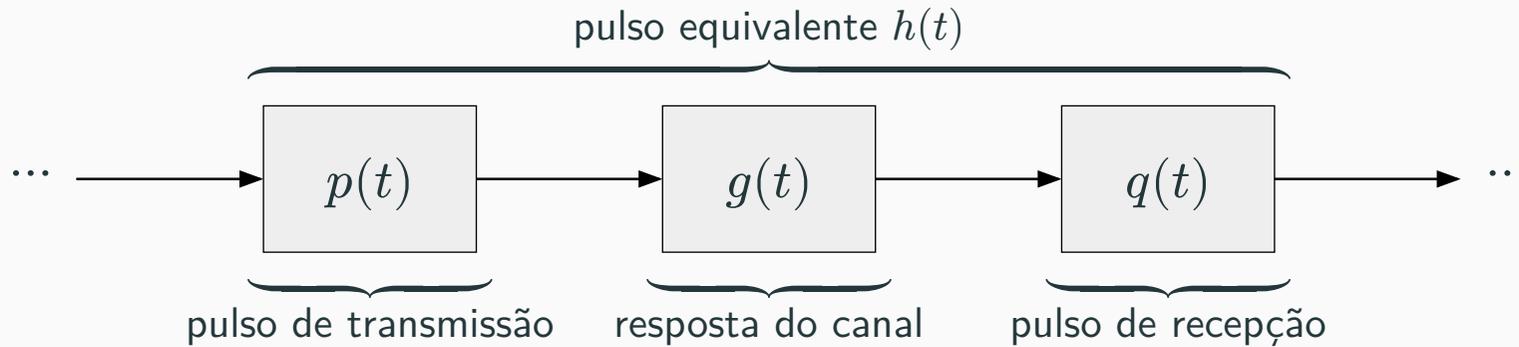
- Os pulsos $p(t)$ e $q(t)$ podem ser escolhidos pelo projetista. Já a resposta ao impulso do canal, $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\}$, não pode ser alterada.
- A inclusão do filtro de recepção $q(t)$ pode parecer desnecessária. Isso fará mais sentido quando estudarmos o desempenho do sistema na presença de ruído.

Pulso equivalente do sistema

Define-se a cascata

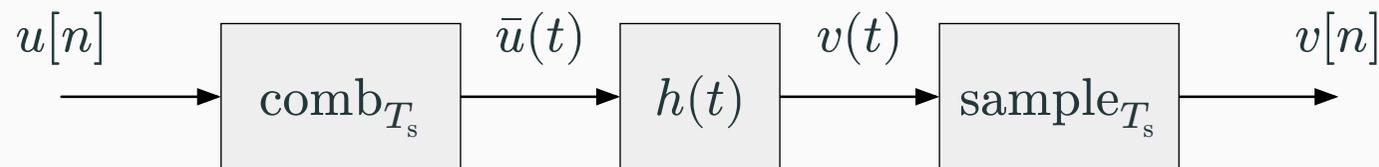
$$h(t) = p(t) \star g(t) \star q(t)$$

como sendo o *pulso equivalente* do sistema.



Pulso equivalente do sistema

Com essa definição, o sistema se simplifica como abaixo.



Note que a operação $u[n] \mapsto v(t)$ é PAM, mas com pulso $h(t)$. Assim,

$$v(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u[i] h(t - iT_s)$$

e portanto

$$v[n] = v(nT_s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u[i] h(nT_s - iT_s).$$

Interferência intersimbólica

Abrindo o somatório:

$$\begin{aligned}v[n] &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} u[i]h(nT_s - iT_s) \\ &= \underbrace{\dots + h(-T_s)u[n-1]}_{\text{indesejado}} + \underbrace{h(0)u[n]}_{\text{desejado}} + \underbrace{h(T_s)u[n+1] + \dots}_{\text{indesejado}}.\end{aligned}$$

Os termos indesejados são chamados de **interferência intersimbólica (ISI)**.

Critério de Nyquist para ISI nula

Teorema. (*H. Nyquist, 1928*) Para evitar interferência intersimbólica, é necessário que o pulso equivalente do sistema satisfaça (no domínio do tempo)

$$h(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

ou, equivalentemente (no domínio da frequência),

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s) = T_s,$$

onde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$.

Demonstração

Novamente, faremos uso do pente de Dirac. A condição no domínio do tempo equivale a

$$h(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_s) = \delta(t)$$

Tomando a transformada de Fourier, obtemos

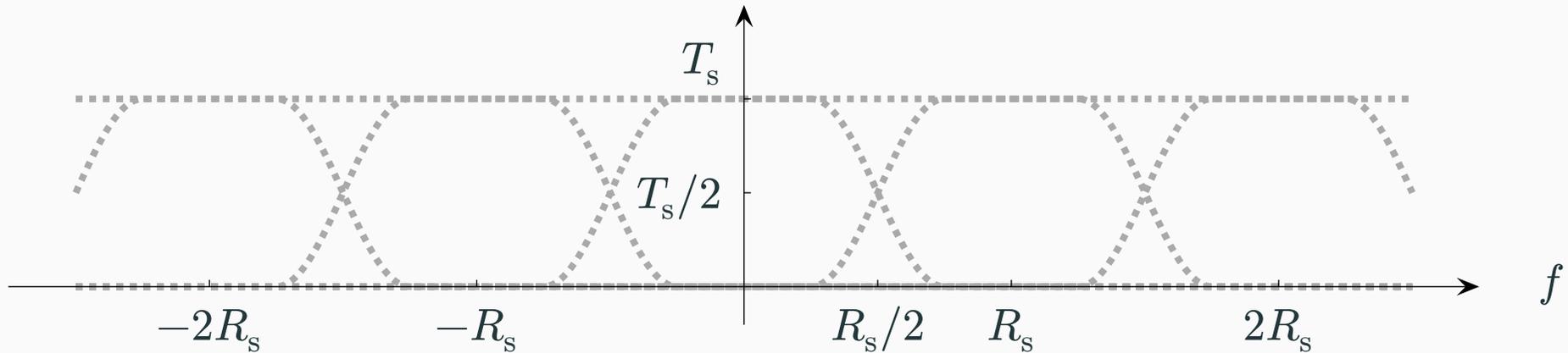
$$H(f) \star \frac{1}{T_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1,$$

de onde segue que

$$\frac{1}{T_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} H\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = 1. \quad \blacksquare$$

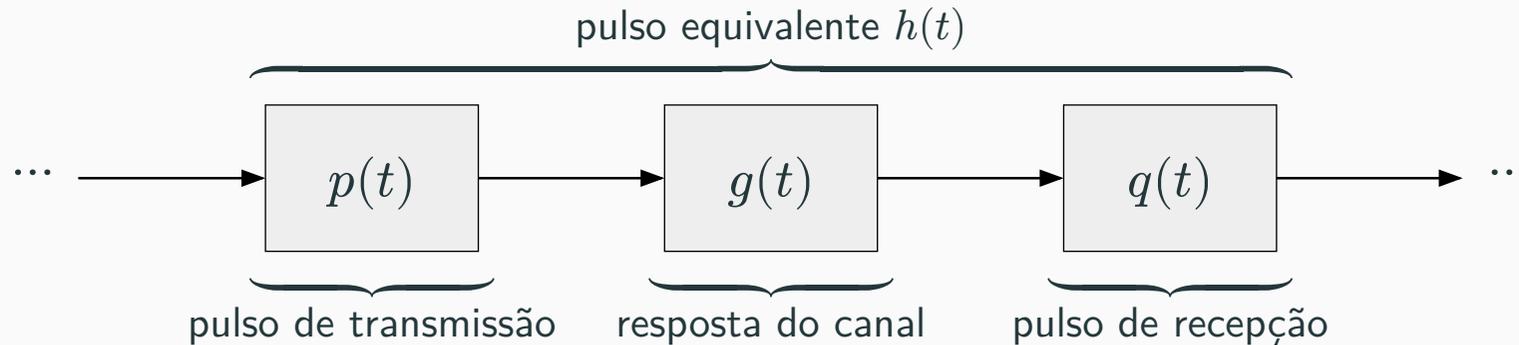
Interpretação gráfica

O somatório $\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s)$ é ilustrado abaixo.



Para que o somatório seja a constante T_s , o espectro do pulso deve apresentar *simetria ímpar* ao redor do ponto $(R_s/2, T_s/2)$. Isso também é chamado de **simetria vestigial**.

- O critério de Nyquist diz respeito *ao pulso equivalente* e não ao pulso de transmissão.



- Se a resposta do canal tem largura de banda $B_g = W$, então o pulso equivalente necessariamente terá largura de banda $B_h \leq W$, pois

$$H(f) = P(f)G(f)Q(f).$$

- O pulso $h(t) = \text{rect}(t/T_s)$ satisfaz o critério de Nyquist (veja no domínio do tempo), mas é impossível tê-lo como pulso equivalente, a menos que $W = \infty$.

Corolário

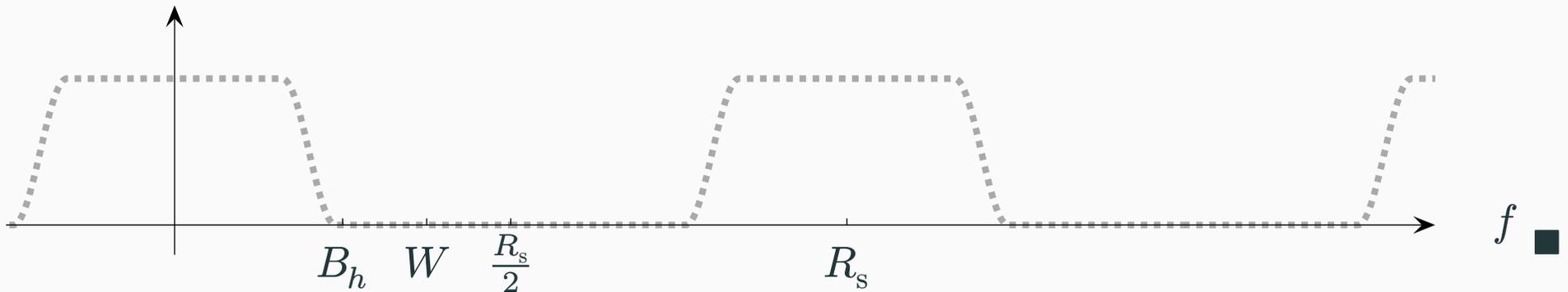
Para evitar interferência intersimbólica é necessário um canal com largura de banda

$$W \geq R_s/2.$$

Observação:

- O termo $B_{\text{Nyq}} \stackrel{\text{def}}{=} R_s/2$ é chamado de *largura de banda de Nyquist* do sistema.

Demonstração: De fato, se $W < R_s/2$, então é impossível ter $\sum_{k \in \mathbb{Z}} H(f - kR_s) = T_s$:



Exercício

Determine a mínima largura de banda do canal necessária para se transmitir símbolos à taxa de $R_s = 40$ kbaud sem interferência intersimbólica.

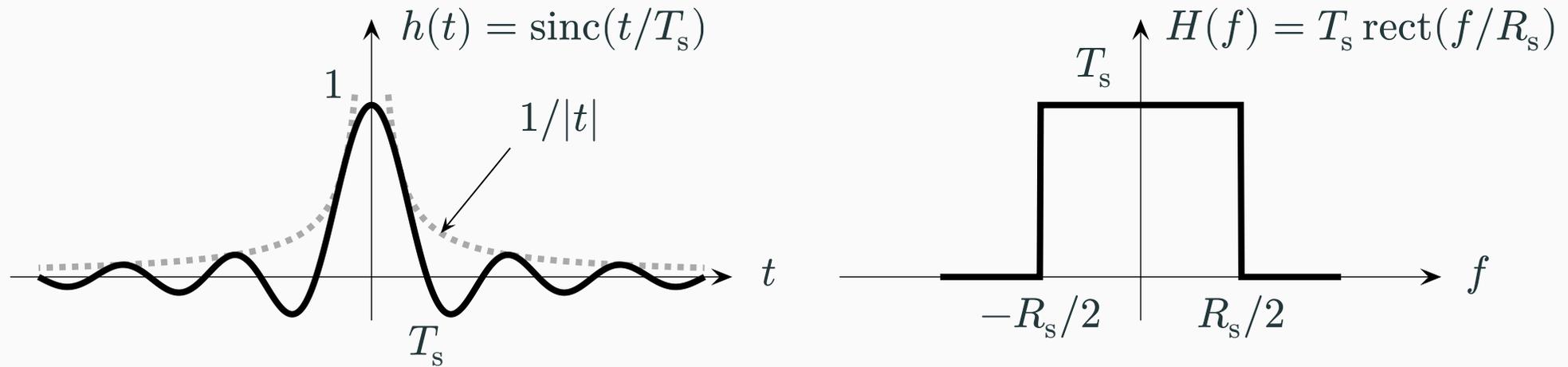
Exercício

Determine a mínima largura de banda do canal necessária para se transmitir símbolos à taxa de $R_s = 40$ kbaud sem interferência intersimbólica.

Resposta: O canal precisa ter largura de banda W de pelo menos $B_{\text{Nyq}} = 20$ kHz.

Pulso sinc

O limite $W = B_{\text{Nyq}} = R_s/2$ é alcançado com o pulso sinc.



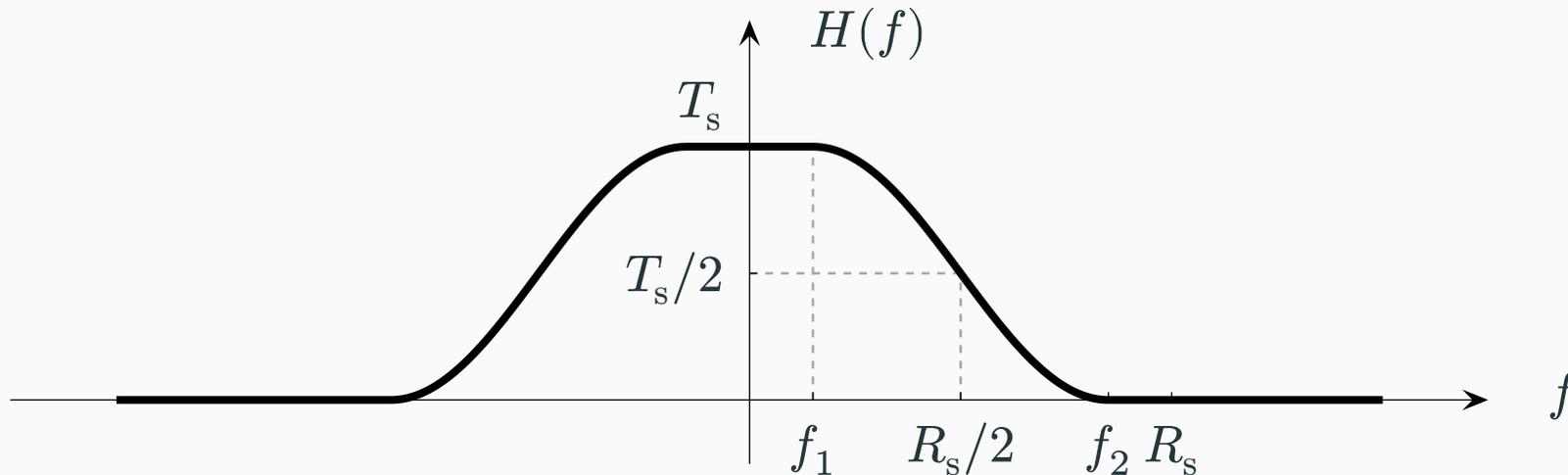
O problema do pulso sinc é o seu lento decaimento temporal:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \sim \frac{1}{|t|}.$$

Isso torna o pulso sinc sensível ao problema de sincronismo de símbolo.

Pulso cosseno levantado

O **pulso cosseno levantado** é bastante usado na prática como alternativa ao pulso sinc. Sejam $f_1 = (1 - \alpha)R_s/2$ e $f_2 = (1 + \alpha)R_s/2$, com $0 \leq \alpha \leq 1$. A transição de $H(f_1) = T_s$ para $H(f_2) = 0$ ocorre de maneira “cossenoidal”.



O pulso satisfaz o critério de Nyquist (perceba a simetria vestigial).

Ao contrário dos pulsos retangular e sinc, o nome “cosseno levantado” é devido ao seu formato no domínio da frequência, e não no domínio do tempo.

No domínio da frequência, o pulso cosseno levantado é dado por

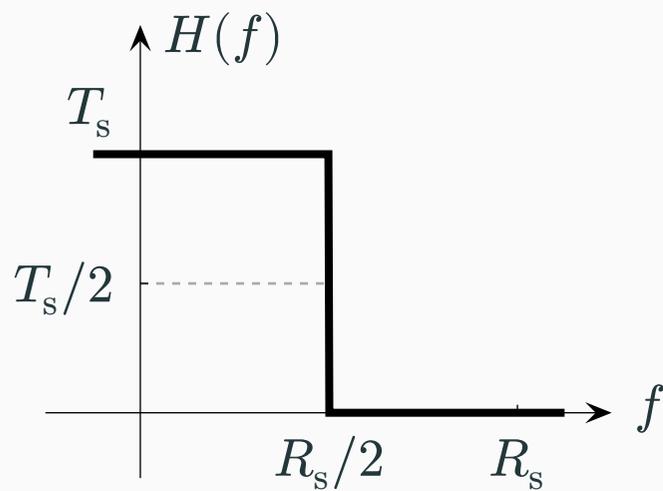
$$H(f) = \begin{cases} T_s, & |f| < f_1, \\ \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \right) \right), & f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0, & f_2 < |f|. \end{cases}$$

No domínio do tempo, por

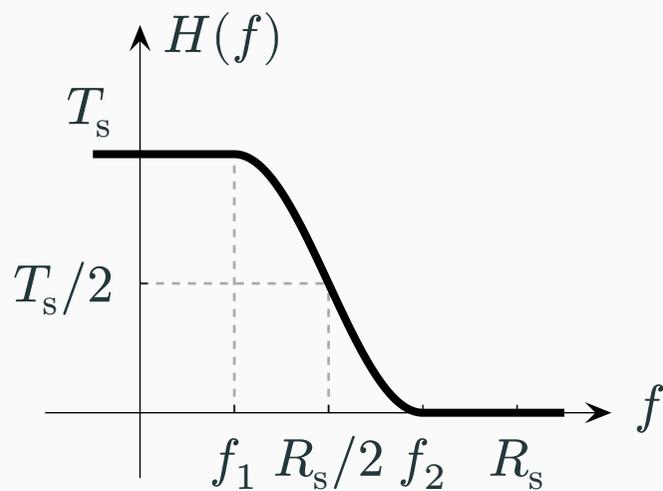
$$h(t) = \text{sinc}(t/T_s) \frac{\cos(\pi \alpha t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2}.$$

Fator de rolloff

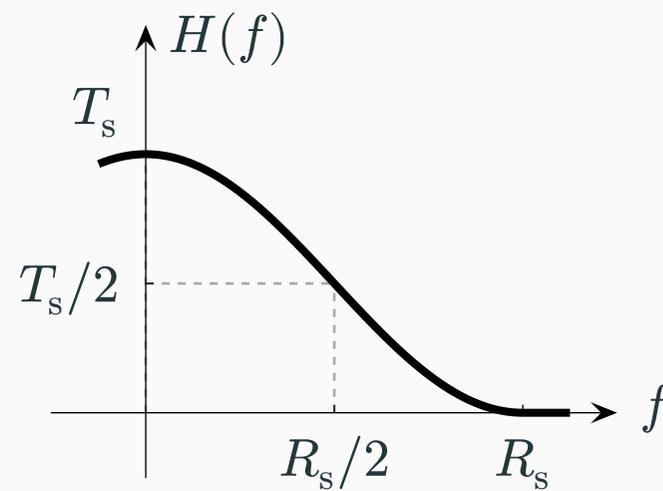
O parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ é chamado de **fator de rolloff** e controla o formato do espectro.



$\alpha = 0$
(pulso sinc)



$\alpha = 1/2$



$\alpha = 1$
"full cosine rolloff"

Largura de banda

A largura de banda do pulso cosseno levantado é dada por

$$B_h = (1 + \alpha) \frac{R_s}{2}.$$

Isolando α e substituindo $B_{\text{Nyq}} = R_s/2$, temos

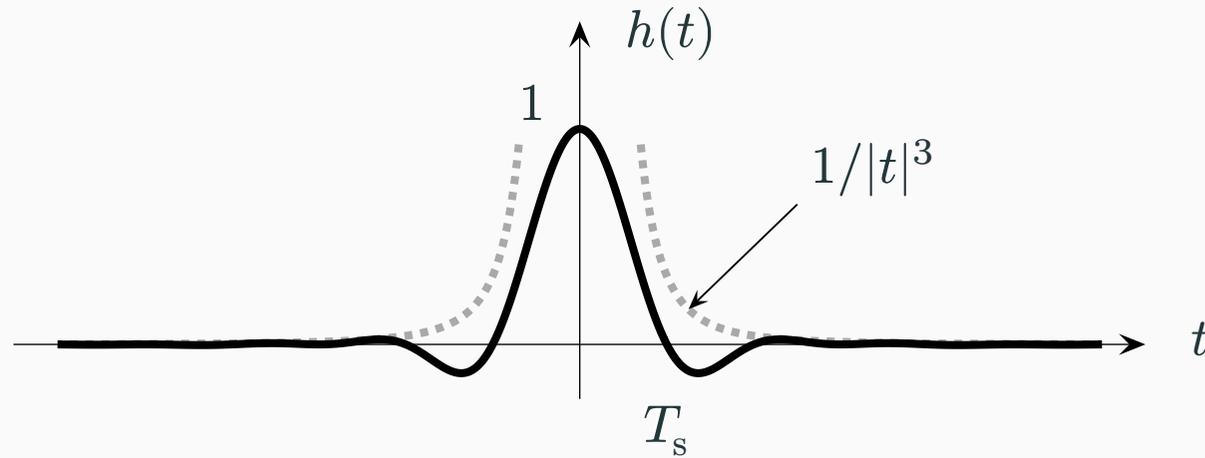
$$\alpha = \frac{B_h - B_{\text{Nyq}}}{B_{\text{Nyq}}},$$

de modo que o fator de rolloff α representa o *excesso de banda* (relativo) quando comparado ao mínimo teórico B_{Nyq} .

Por exemplo, se $R_s = 40$ kbaud, então o mínimo teórico é $B_{\text{Nyq}} = R_s/2 = 20$ kHz; para $\alpha = 1/5$, a largura de banda do pulso será 20% a mais que esse mínimo teórico, ou seja, $B_h = 24$ kHz.

Decaimento rápido

O pulso cosseno levantado resolve o problema do lento decaimento temporal do pulso sinc:



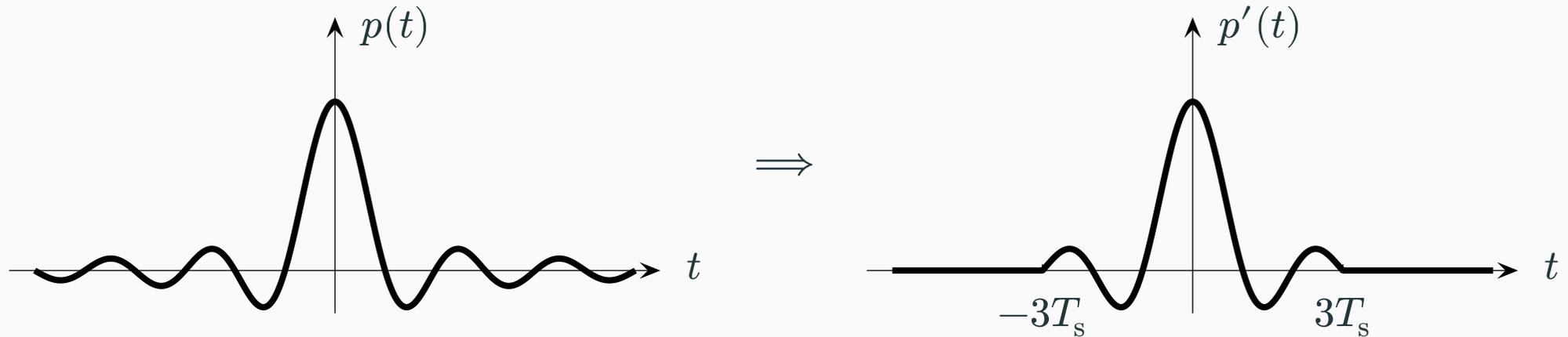
Temos:

$$h(t) = \underbrace{\text{sinc}(t)}_{\sim 1/|t|} \frac{\cos(\pi\alpha t)}{\underbrace{1 - (2\alpha t)^2}_{\sim 1/|t|^2}} \sim \frac{1}{|t|^3}.$$

Como lidar com pulsos de duração ilimitada

Na prática, não é possível utilizar pulsos com duração ilimitada. Isso é resolvido com:

- Um *truncamento*...

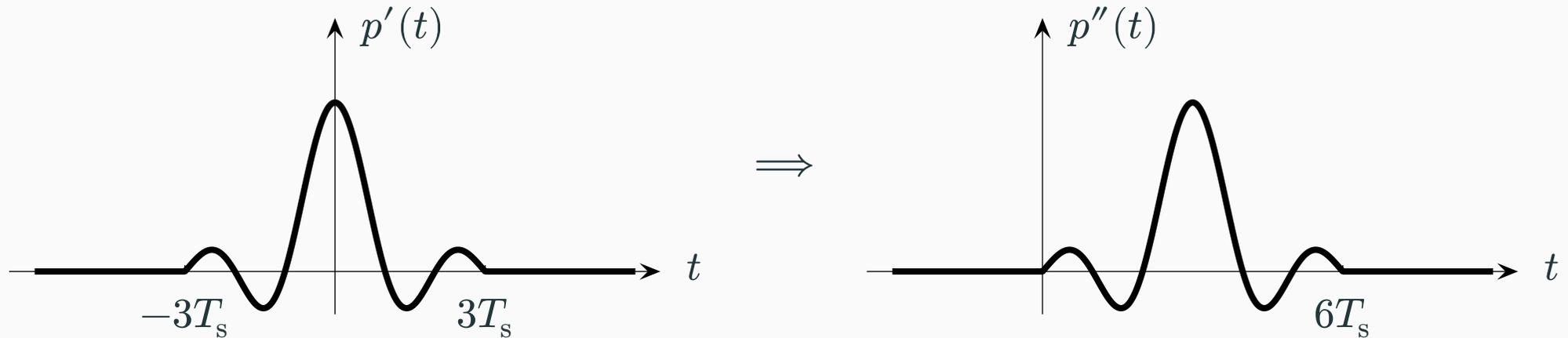


O exemplo considerou um truncamento de $-3T_s$ a $3T_s$. Na prática, o intervalo é maior.

Como lidar com pulsos de duração ilimitada

Na prática, não é possível utilizar pulsos com duração ilimitada. Isso é resolvido com:

- ...em conjunto com um *atraso*.

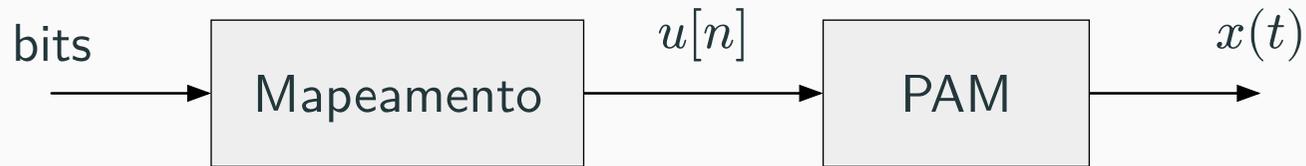


O clock do receptor ficará atrasado com relação ao do transmissor. Veremos mais detalhes adiante.

Códigos de linha

Códigos de linha

Considere o caso em que a sequência real $u[n]$ advém de uma sequência de bits a partir de um mapeamento bits \mapsto símbolos.



Exemplos de mapeamento

- **Polar:** bit 0 $\mapsto -1$ e bit 1 $\mapsto +1$.
Pode-se utilizar a convenção oposta.
- **Unipolar:** bit 0 $\mapsto 0$ e bit 1 $\mapsto 1$.
Também chamado de “apolar” ou “on-off.”
- **AMI:** bit 0 $\mapsto 0$ e bit 1 $\mapsto \pm 1$, alternadamente.
Alternate mark inversion, também chamado de “bipolar”.
- **Manchester:** bit 0 $\mapsto (+1, -1)$ e bit 1 $\mapsto (-1, +1)$.
Alternativamente, é possível modelar como “polar” + “pulso Manchester”.

Exercício

Esboce o sinal modulado $x(t)$ para cada código de linha abaixo, referente ao bits 100101. Assuma amplitude de 5 V e taxa de bits de 200 bit/s.

- (a) Polar NRZ.
- (b) Polar RZ.
- (c) Unipolar NRZ.
- (d) Unipolar RZ.
- (e) AMI NRZ.
- (f) AMI RZ.
- (g) Manchester.

Propriedades desejáveis de um código de linha

- Características espectrais.
 - ▶ Largura de banda menor possível.
...fixada a taxa de bits.
 - ▶ Densidade espectral de potência favorável.
Exemplo: nulo no DC (canal ou dispositivos intermediários podem eliminar componentes contínuos).
- Desempenho na presença de ruído.
 - ▶ Taxa de erro de bits menor possível.
...fixadas a taxa de bits e a largura de banda.
- Facilidade de implementação.
 - ▶ Possibilidade de recuperação do clock a partir do próprio sinal.
 - ▶ Independência da informação.
Exemplo: sequência longa de 0s ou de 1s.

Referências

Referências

- [1] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed. McGraw Hill, 2008.
- [2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [3] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.
- [4] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.