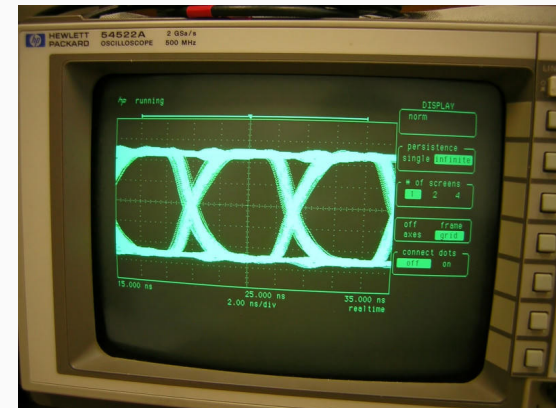


# Sistemas de Comunicação I

## Densidade espectral de energia e de potência



---

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

# Sinais de energia

---

# Energia de um sinal

A **energia** de um sinal  $x(t)$  é definida por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

Um sinal com  $0 < E_x < \infty$  é chamado de **sinal de energia**.

A energia é uma medida da “intensidade” do sinal ao longo de todo o tempo.

# Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

# Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \text{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

*Resposta:*

(a)  $E_x = A^2 T$ .

(b)  $E_x = \frac{c^2}{2a}$ .

# Teorema de Parseval

É possível calcular a energia de um sinal  $x(t)$  no domínio da frequência:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Esse resultado é conhecido como **teorema de Parseval**.

# Demonstração do teorema de Parseval

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi tf} df \right]^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi tf} df \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi tf} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A **densidade espectral de energia** de um sinal de energia  $x(t)$  é definida por

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pelo teorema de Parseval. Assim:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) \, df.$$

# Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

# Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

*Resposta:*

(a)  $\Psi_x(f) = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(Tf)$ .

(b)  $\Psi_x(f) = \frac{c^2}{a^2 + (2\pi f)^2}$ .

# Autocorrelação temporal de energia

A **autocorrelação temporal de energia** de um sinal de energia  $x(t)$  é definida por

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt.$$

É uma medida da similaridade entre  $x(t)$  e sua versão deslocada de  $\tau$ .

## Propriedades:

1. Se  $x(t)$  é real, então  $\psi_x(\tau)$  é real e par.

2.  $\psi_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau)$ .

A autocorrelação temporal de energia é a convolução do sinal com sua versão refletida no tempo.

3.  $E_x = \psi_x(0)$ .

# Exercício

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

# Exercício

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

*Resposta:*

(a)  $\psi_x(\tau) = A^2 T \operatorname{tri}(\tau/T)$ .

(b)  $\psi_x(\tau) = \frac{c^2}{2a} e^{-a|\tau|}$ .

# Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de energia determinísticos

A autocorrelação temporal de energia  $\psi_x(\tau)$  e a densidade espectral de energia  $\Psi_x(f)$  são pares transformados de Fourier:

$$\Psi_x(f) = \mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\}.$$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\} &= \mathcal{F}\{x(\tau) \star x^*(-\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{x(\tau)\} \mathcal{F}\{x^*(-\tau)\} \\ &= X(f) X^*(f) \\ &= |X(f)|^2 \\ &= \Psi_x(f). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

# Exercício

Verifique o teorema para os sinais abaixo.

(a)  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ , onde  $T > 0$ .

(b)  $x(t) = ce^{-at} u(t)$ , onde  $a > 0$ .

# Sinais de potência

---

# Sinais de potência

Para ter energia finita, um sinal deve ter duração limitada ou decair para zero quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

No entanto, muitas vezes encontramos sinais que “persistem” indefinidamente. Exemplos:

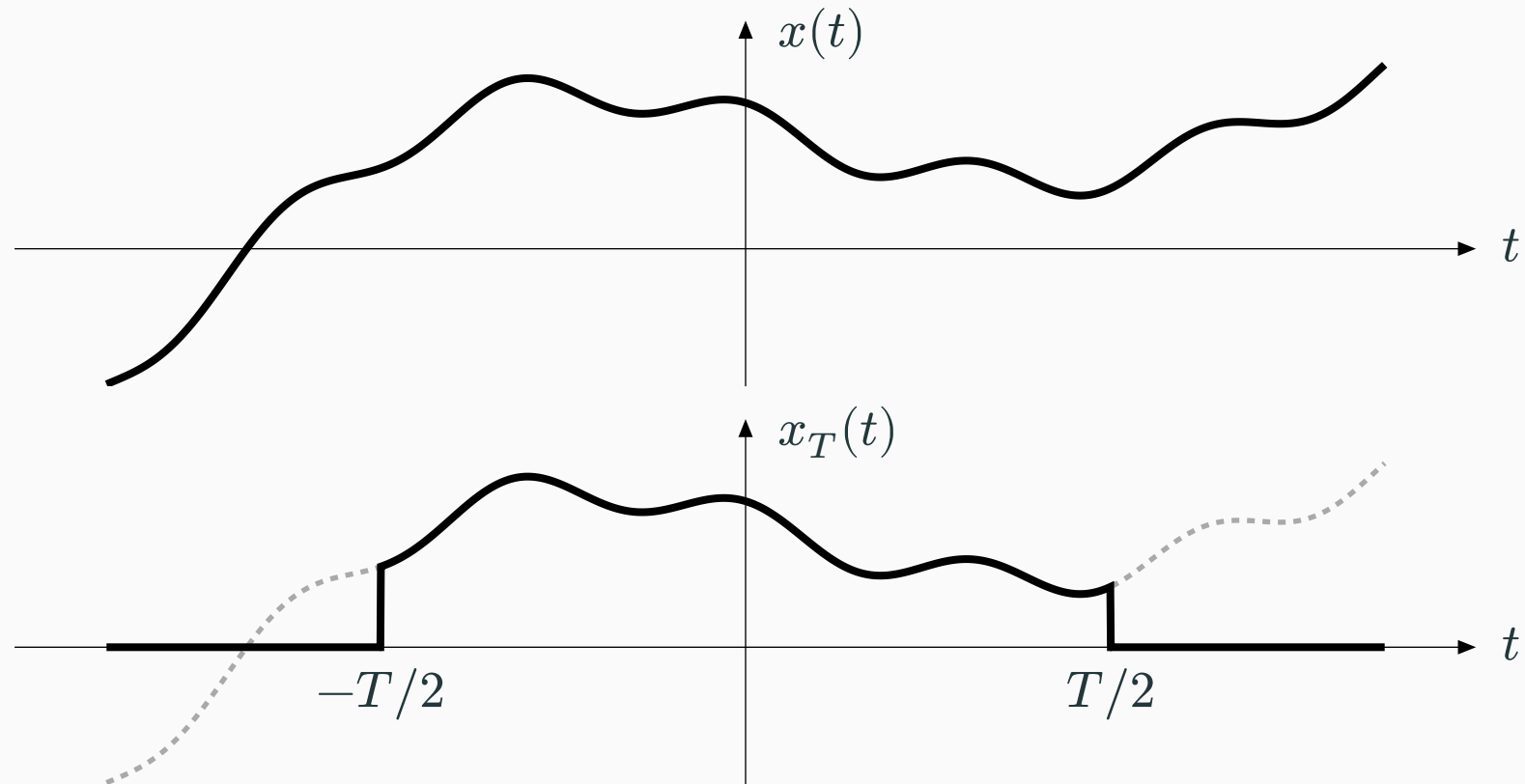
- Um sinal periódico.
- Um sinal de comunicação transmitindo dados continuamente.

[figuras]

Nesse caso, a energia do sinal é sempre infinita! Como definir uma medida adequada de “intensidade”?

# Sinal truncado no tempo

*Ideia:* Calcular a energia média por unidade de tempo.



# Potência de um sinal

A **potência** de um sinal  $x(t)$  é definida por

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{x_T}$$

Um sinal com  $0 < P_x < \infty$  é chamado de **sinal de potência**.

*Observação:* No caso particular de um sinal periódico  $x(t)$  com período  $T_0$ ,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt.$$

Calcule a potência...

# Como definir a densidade espectral de potência?

Seja  $x(t)$  um sinal de potência.

*Problema:* O teorema de Parseval só se aplica a sinais de energia.

*Ideia:* O sinal original  $x(t)$  é de potência, mas o sinal truncado  $x_T(t)$  é de energia!

Portanto, podemos aplicar o teorema de Parseval ao sinal truncado  $x_T(t)$ :

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df,$$

onde  $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ .

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 df. \end{aligned}$$

# Densidade espectral de potência

A **densidade espectral de potência** de um sinal de potência  $x(t)$  é definida por

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pela última formula do slide anterior. Assim:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \, df.$$

A **autocorrelação temporal de potência** de um sinal de potência  $x(t)$  é definida por

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt.$$

Novamente, é uma medida da similaridade entre  $x(t)$  e sua versão deslocada de  $\tau$ .

## Propriedades:

1. Se  $x(t)$  é real, então  $R_x(\tau)$  é real e par.
2.  $P_x = R_x(0)$ .

# Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de potência determinísticos

A autocorrelação temporal de potência  $S_x(\tau)$  e a densidade espectral de potência  $R_x(f)$  são pares transformados de Fourier:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}.$$

# Processos estocásticos ESA

---

Soon.

# Medidas de largura de banda

---

Munido das definições de densidade espectral, podemos definir o conceito de *largura de banda*.

Soon.

Soon.

Soon.

Soon. – Analogia com quantil.

# Largura de banda efetiva (rms)

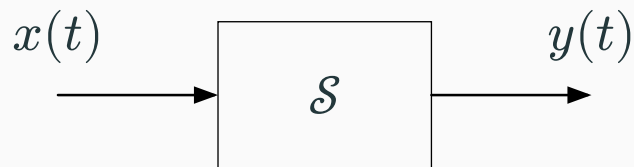
Soon. – Analogia com desvio padrão.

# Densidade espectral e sistemas LTI

---

# Sistemas lineares invariantes no tempo

Considere um sistema linear invariante no tempo  $\mathcal{S}$ , tendo  $x(t)$  em sua entrada e  $y(t)$  em sua saída.



Da teoria de sinais e sistemas, sabe-se que

$$y(t) = h(t) \star x(t),$$

onde  $h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)]$  é a *resposta ao impulso* do sistema, e

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

onde  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  é a *resposta em frequência* do sistema.

Para o caso de sinais de energia, a seguinte relação é imediata:

$$[\text{DE da saída}] = |H(f)|^2 [\text{DE da entrada}]$$

Para o caso de sinais de potência (determinísticos ou estacionários no sentido amplo), a relação continua sendo válida!

# Referências

---

- [1] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.