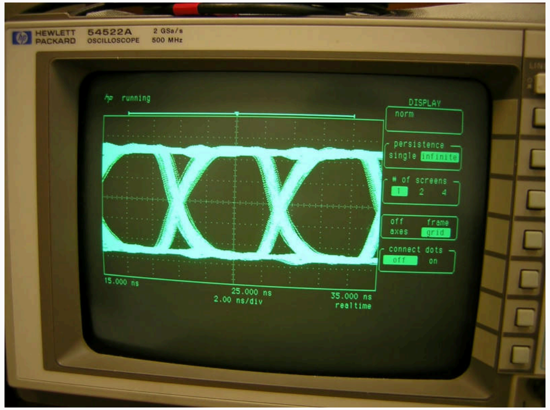
Sistemas de Comunicação I

Densidade espectral de energia e de potência



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Sinais de energia

Energia de um sinal

A **energia** de um sinal $x(t)$ é definida por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Um sinal com $0 < E_x < \infty$ é chamado de **sinal de energia**.

A energia é uma medida da "intensidade" do sinal ao longo de todo o tempo.

Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Exercício

Determine a energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Resposta:

(a) $E_x = A^2T$.

(b) $E_x = \dfrac{c^2}{2a}$.

Teorema de Parseval

É possível calcular a energia de um sinal $x(t)$ no domínio da frequência:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f.$$

Esse resultado é conhecido como **teorema de Parseval**.

Demonstração do teorema de Parseval

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi t f} \, \mathrm{d}f \right]^* \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-j2\pi t f} \, \mathrm{d}f \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi t f} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}f \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) \, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

A **densidade espectral de energia** de um sinal de energia $x(t)$ é definida por

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pelo teorema de Parseval. Assim:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) \, \mathrm{d}f.$$

Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Exercício

Determine a densidade espectral de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Em seguida, verifique o teorema de Parseval.

Resposta:

(a) $\Psi_x(f) = A^2T^2\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$.

(b) $\Psi_x(f) = \dfrac{c^2}{a^2 + (2\pi f)^2}$.

Autocorrelação temporal de energia

A **autocorrelação temporal de energia** de um sinal de energia $x(t)$ é definida por

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t.$$

É uma medida da similaridade entre $x(t)$ e sua versão deslocada de τ.

Propriedades:

1. Se $x(t)$ é real, então $\psi_x(\tau)$ é real e par.
2. $\psi_x(\tau) = x(\tau) \star x^*(-\tau)$.
   A autocorrelação temporal de energia é a convolução do sinal com sua versão refletida no tempo.
3. $E_x = \psi_x(0)$.

Exercício

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Determine a autocorrelação temporal de energia dos sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Resposta:

(a) $\psi_x(\tau) = A^2 T\,\mathrm{tri}(\tau/T)$.

(b) $\psi_x(\tau) = \dfrac{c^2}{2a} e^{-a|\tau|}$.

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de energia determinísticos

A autocorrelação temporal de energia $\psi_x(\tau)$ e a densidade espectral de energia $\Psi_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$\Psi_x(f) = \mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\psi_x(\tau)\} &= \mathcal{F}\{x(\tau) \star x^*(-\tau)\} \\
&= \mathcal{F}\{x(\tau)\}\mathcal{F}\{x^*(-\tau)\} \\
&= X(f)X^*(f) \\
&= |X(f)|^2 \\
&= \Psi_x(f). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício

Verifique o teorema para os sinais abaixo.

(a) $x(t) = A\,\mathrm{rect}(t/T)$, onde $T > 0$.

(b) $x(t) = ce^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, onde $a > 0$.

Sinais de potência

Sinais de potência

Para ter energia finita, um sinal deve ter duração limitada ou decair para zero quando $t \to \pm\infty$.

No entanto, muitas vezes encontramos sinais que “persistem” indefinidamente. Exemplos:

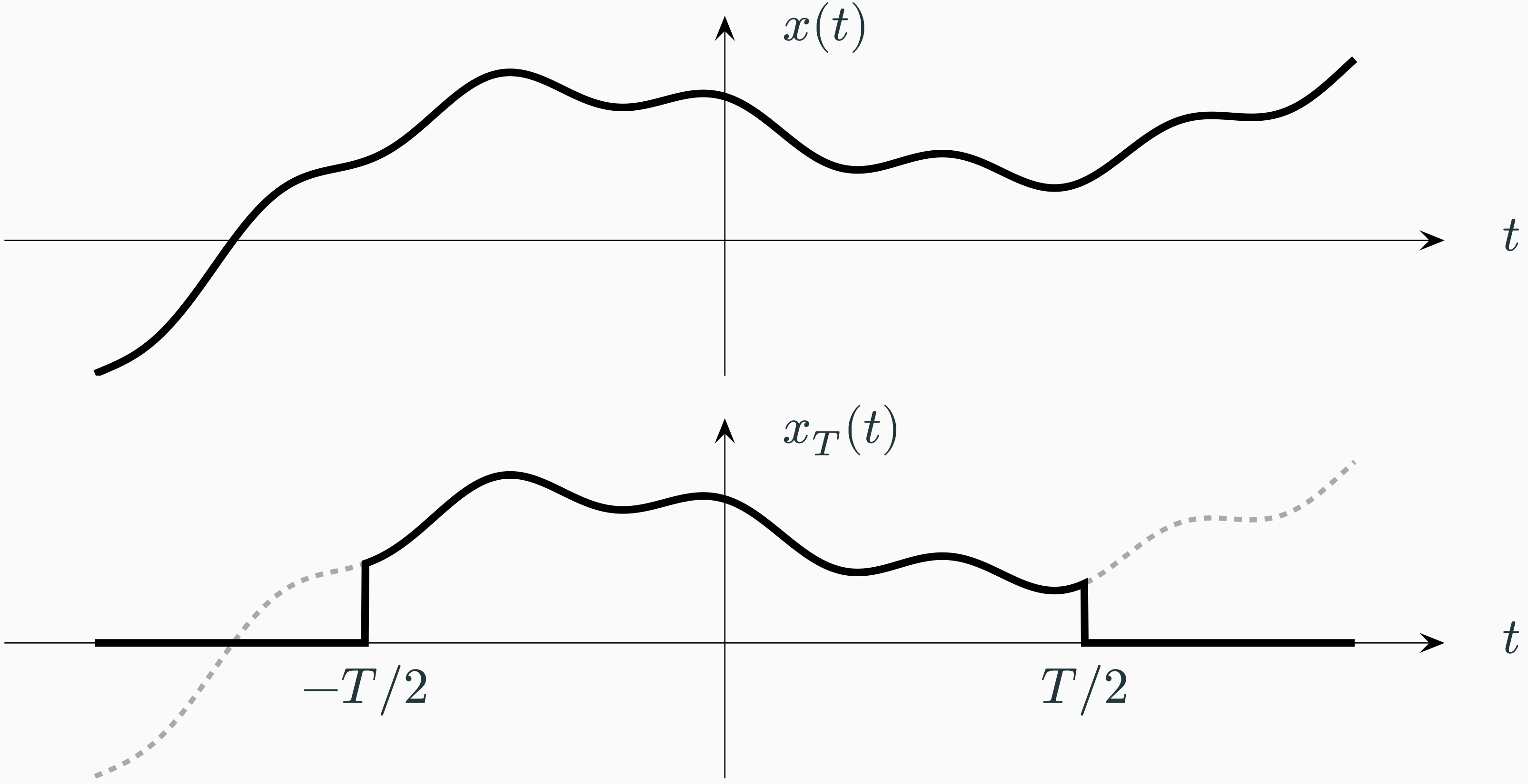
- Um sinal periódico.
- Um sinal de comunicação transmitindo dados continuamente.

[figuras]

Nesse caso, a energia do sinal é sempre infinita! Como definir uma medida adequada de “intensidade”?

Sinal truncado no tempo

Ideia: Calcular a energia média por unidade de tempo.



Potência de um sinal

A **potência** de um sinal $x(t)$ é definida por

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E_{x_T}$$

Um sinal com $0 < P_x < \infty$ é chamado de **sinal de potência**.

Observação: No caso particular de um sinal periódico $x(t)$ com período T_0,

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Exercício

Calcule a potência...

Como definir a densidade espectral de potência?

Seja $x(t)$ um sinal de potência.

Problema: O teorema de Parseval só se aplica a sinais de energia.

Ideia: O sinal original $x(t)$ é de potência, mas o sinal truncado $x_T(t)$ é de energia!

Portanto, podemos aplicar o teorema de Parseval ao sinal truncado $x_T(t)$:

$$E_{x_T} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 \, \mathrm{d}f,$$

onde $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$.

Podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
P_x &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 \, \mathrm{d}f \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \, |X_T(f)|^2 \, \mathrm{d}f.
\end{aligned}
$$

Densidade espectral de potência

A **densidade espectral de potência** de um sinal de potência $x(t)$ é definida por

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \, |X_T(f)|^2.$$

Esta definição é motivada pela última formula do slide anterior. Assim:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \, \mathrm{d}f.$$

Autocorrelação temporal de potência

A **autocorrelação temporal de potência** de um sinal de potência $x(t)$ é definida por

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)\,\mathrm{d}t.$$

Novamente, é uma medida da similaridade entre $x(t)$ e sua versão deslocada de τ.

Propriedades:

1. Se $x(t)$ é real, então $R_x(\tau)$ é real e par.
2. $P_x = R_x(0)$.

Teorema de Wiener–Khinchin para sinais de potência determinísticos

A autocorrelação temporal de potência $S_x(\tau)$ e a densidade espectral de potência $R_x(f)$ são pares transformados de Fourier:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}.$$

Processos estocásticos ESA

Soon.

Medidas de largura de banda

Munido das definições de densidade espectral, podemos definir o conceito de *largura de banda*.

Soon.

Largura de banda absoluta

Soon.

Largura de banda de primeiro lóbulo

Soon.

Largura de banda essencial

Soon. – Analogia com quantil.

Largura de banda efetiva (rms)

Soon. – Analogia com desvio padrão.

Densidade espectral e sistemas LTI

Considere um sistema linear invariante no tempo $\mathcal{S}$, tendo $x(t)$ em sua entrada e $y(t)$ em sua saída.

Da teoria de sinais e sistemas, sabe-se que

$$y(t) = h(t) \star x(t),$$

onde $h(t) = \mathcal{S}[\delta(t)]$ é a *resposta ao impulso* do sistema, e

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

onde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a *resposta em frequência* do sistema.

Densidade espectral e sistemas LTI

Para o caso de sinais de energia, a seguinte relação é imediata:

$$[\text{DE da saída}] = |H(f)|^2 \; [\text{DE da entrada}]$$

Para o caso de sinais de potência (determinísticos ou estacionários no sentido amplo), a relação continua sendo válida!

Referências

Referências

[1] B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. Oxford University Press, 2009.