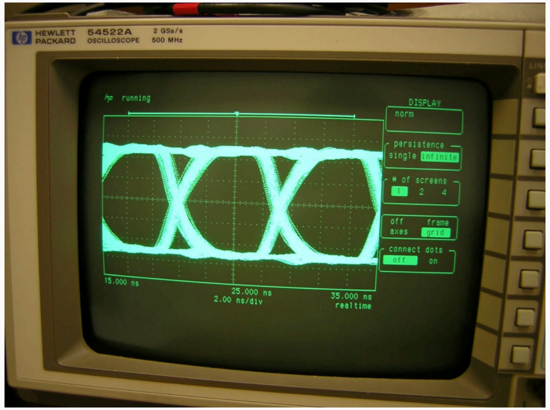
Sistemas de Comunicação I

Modulação de portadora



Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

Instituto Federal de Santa Catarina

Introdução

Motivação

Modelo de translação em frequência geral:

Nomenclatura:

- $x(t)$ sinal modulante.
- $s(t)$ sinal modulado, sinal transmitido.
- $r(t)$ sinal recebido.
- $\hat{x}(t)$ sinal demodulado.

Sinais em banda base:

$x(t)$ e $\hat{x}(t)$.

Sinais em banda passante:

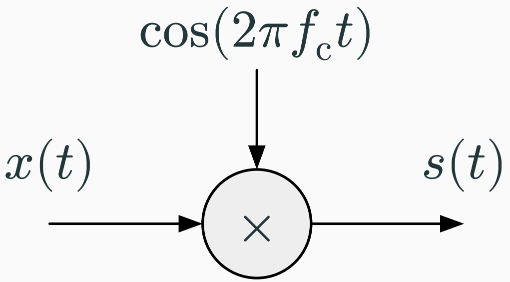
$s(t)$ e $r(t)$.

Esquemas de modulação de portadora

Seja $x(t)$ um sinal em banda base. A modulação de **banda lateral dupla** (DSB) deste sinal é dada por

$$s(t) = x(t)\cos(2\pi f_\mathrm{c} t),$$

onde f_c é a frequência da portadora.

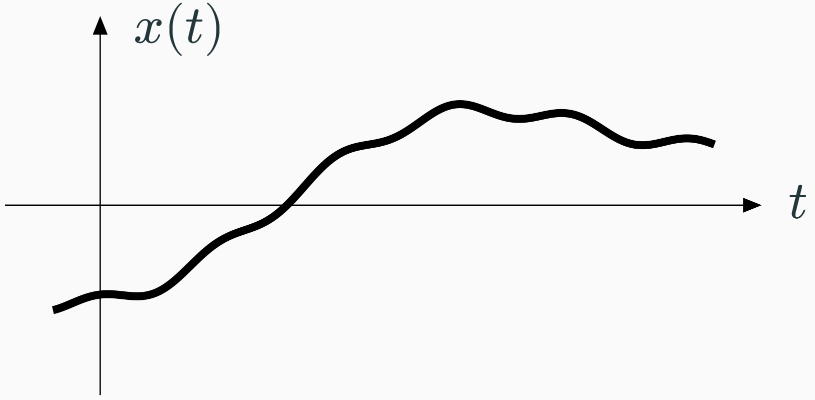


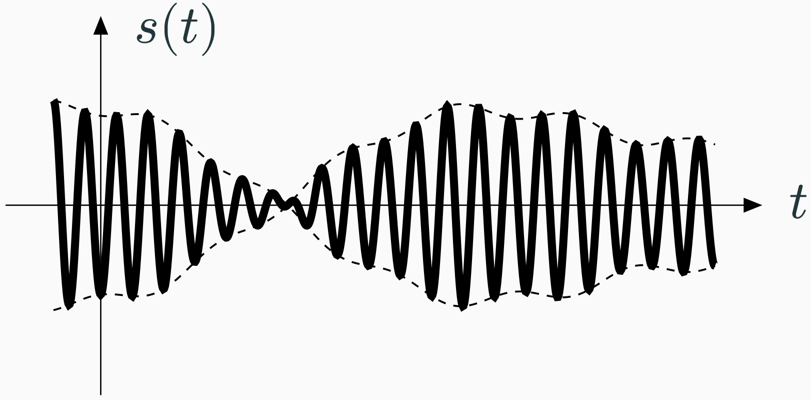
Modulação de banda lateral dupla (DSB)

Seja $x(t)$ um sinal em banda base. A modulação de **banda lateral dupla** (DSB) deste sinal é dada por

$$s(t) = x(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t),$$

onde f_{c} é a frequência da portadora.

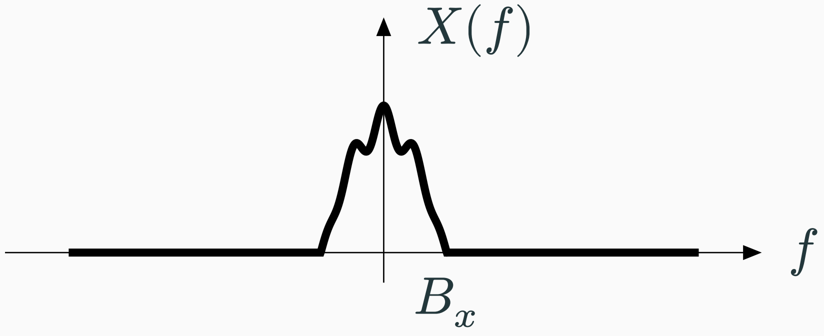


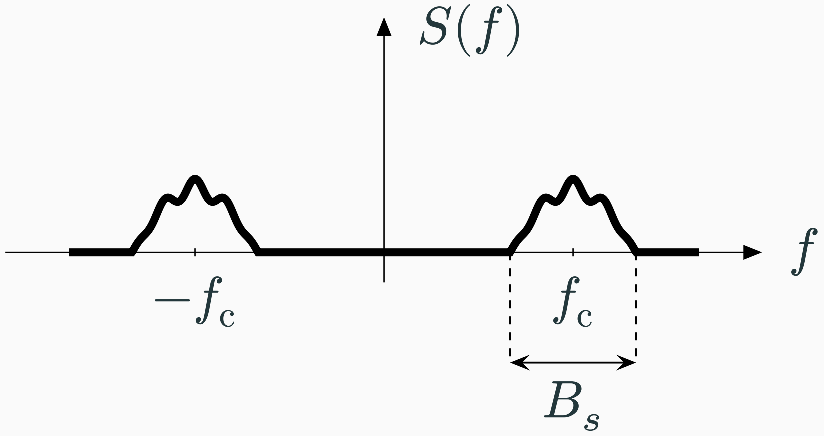


Espectro do sinal modulado

No domínio da frequência:

$$S(f) = \tfrac{1}{2}X(f + f_\mathrm{c}) + \tfrac{1}{2}X(f - f_\mathrm{c}).$$



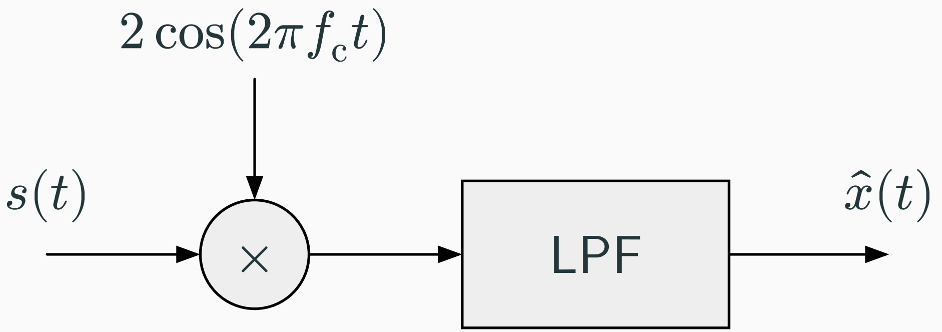


- Para que $x(t)$ seja recuperado a partir de $s(t)$, é necessário $f_\mathrm{c} > B_x$ (na prática, $f_\mathrm{c} \gg B_x$).
- A banda ocupada pelo sinal em banda passante é o dobro daquela do sinal em banda base:

$$B_s = 2B_x.$$

Demodulação do sinal DSB

A demodulação pode ser realizada como abaixo, onde LPF denota *filtragem passa-baixa*.



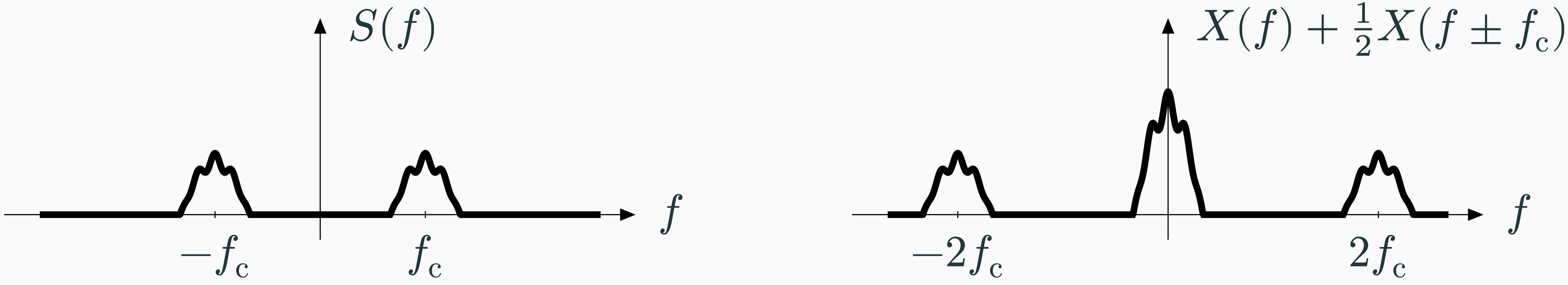
No domínio da frequência, a saída do multiplicador é

$$X(f) + \tfrac{1}{2}X(f + 2f_c) + \tfrac{1}{2}X(f - 2f_c).$$

No domínio da frequência, a saída do multiplicador é

$$X(f) + \tfrac{1}{2}X(f + 2f_{\mathrm{c}}) + \tfrac{1}{2}X(f - 2f_{\mathrm{c}}).$$

Os termos em $\pm 2f_{\mathrm{c}}$ são removidos pela filtragem passa-baixa.



A frequência de corte do filtro deve se situar entre B_x e $2f_{\mathrm{c}} - B_x$.

Mostre que:

(a) Se a diferença de fase entre os osciladores do receptor e transmissor é θ, então

$$\hat{x}(t) = x(t)\cos(\theta).$$

(b) Se a diferença de frequência entre os osciladores do receptor e transmissor é Δf, então

$$\hat{x}(t) = x(t)\cos(2\pi\Delta f\, t).$$

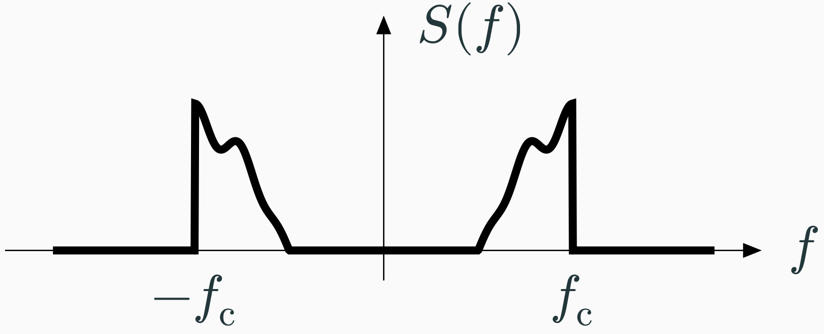
Observação: O problema de **sincronismo de portadora** pode ser resolvido de algumas maneiras:

- Portadora piloto: Transmite-se a portadora junto com $s(t)$.
- Malha de Costas (Costas loop): Utiliza técnicas de controle realimentado para recriar a portadora localmente a partir do próprio $s(t)$.

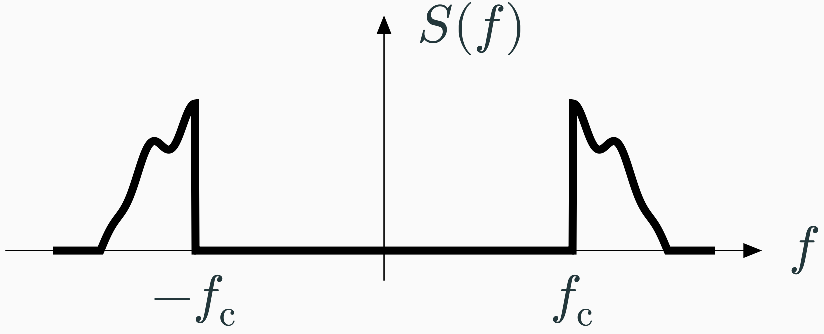
Modulação de banda lateral simples (SSB)

Na modulação de **banda lateral simples** (SSB), apenas uma das bandas laterais é selecionada: ou a LSB (banda lateral inferior) ou a USB (banda lateral superior).

SSB-LSB



SSB-USB

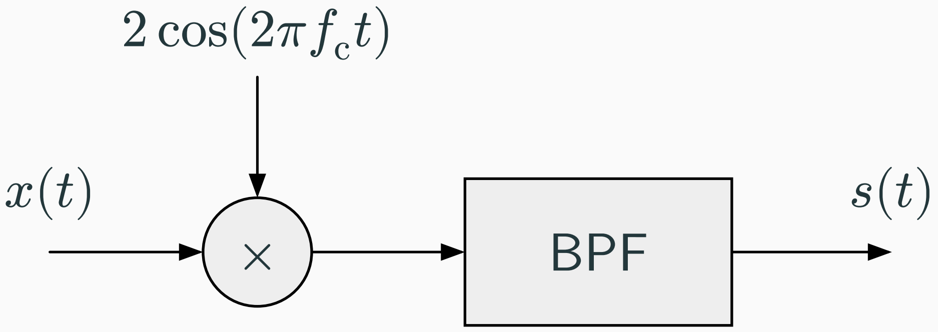


Assim, a banda ocupada pelo sinal em banda passante é a mesma do sinal em banda base:

$$B_s = B_x.$$

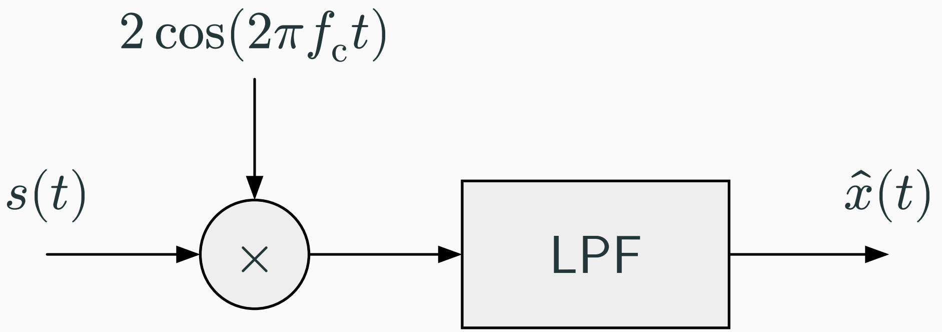
Diagrama de blocos

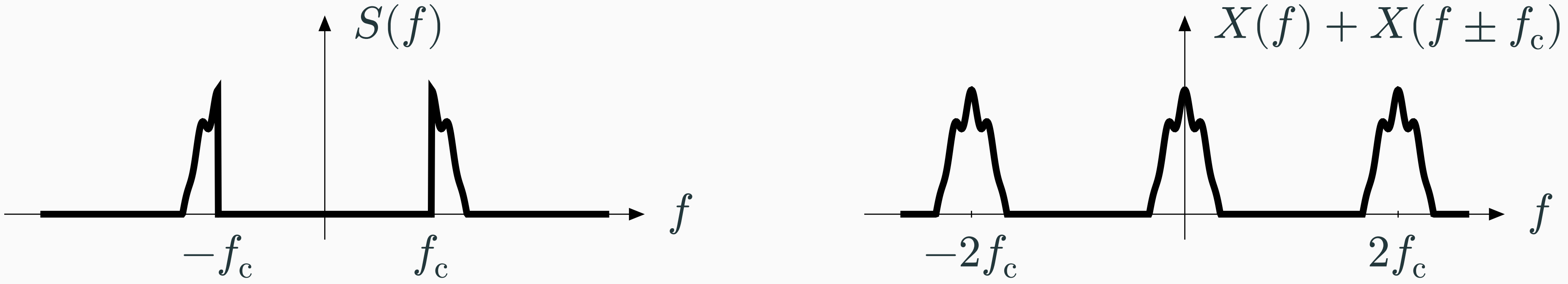
A modulação pode ser realizada através de um modulador DSB seguido de um filtro que seleciona a banda desejada.



Observação: Esta implementação exige um sinal modulante com baixo conteúdo espectral no DC.

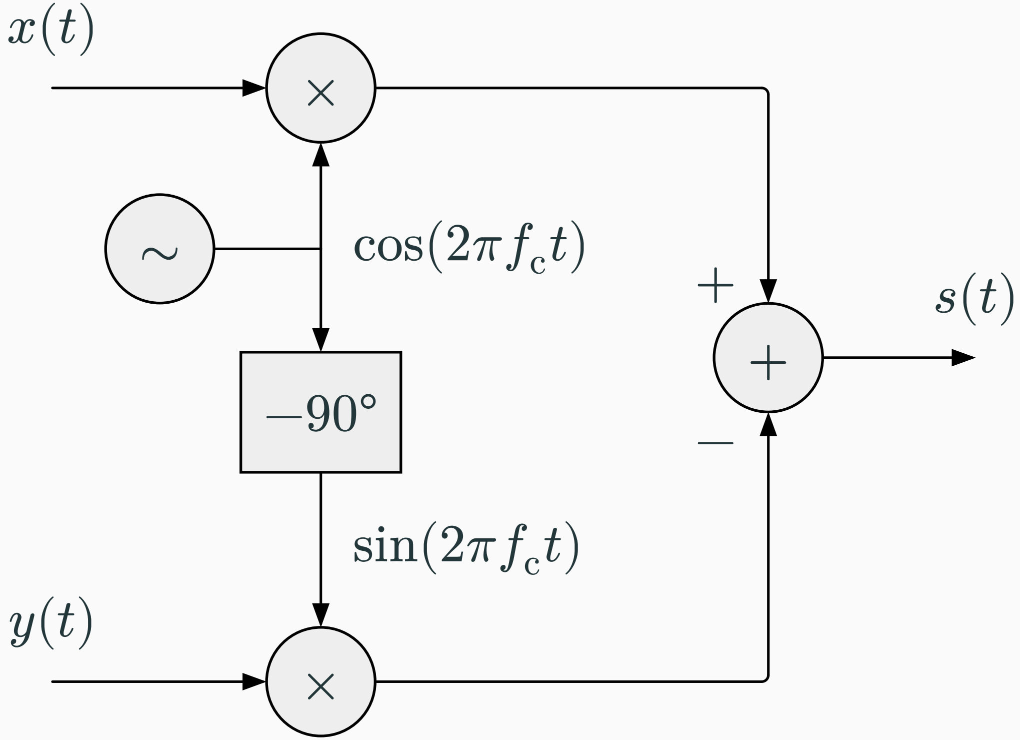
Pode-se utilizar um demodulador DSB!





Modulação de portadora em quadratura (QC)

Na modulação de **portadora em quadratura** (QC), utiliza-se duas portadoras de mesma frequência, mas defasadas de $90°$.



Modulação de portadora em quadratura (QC)

Matematicamente,

$$s(t) = x(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t) - y(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}} t).$$

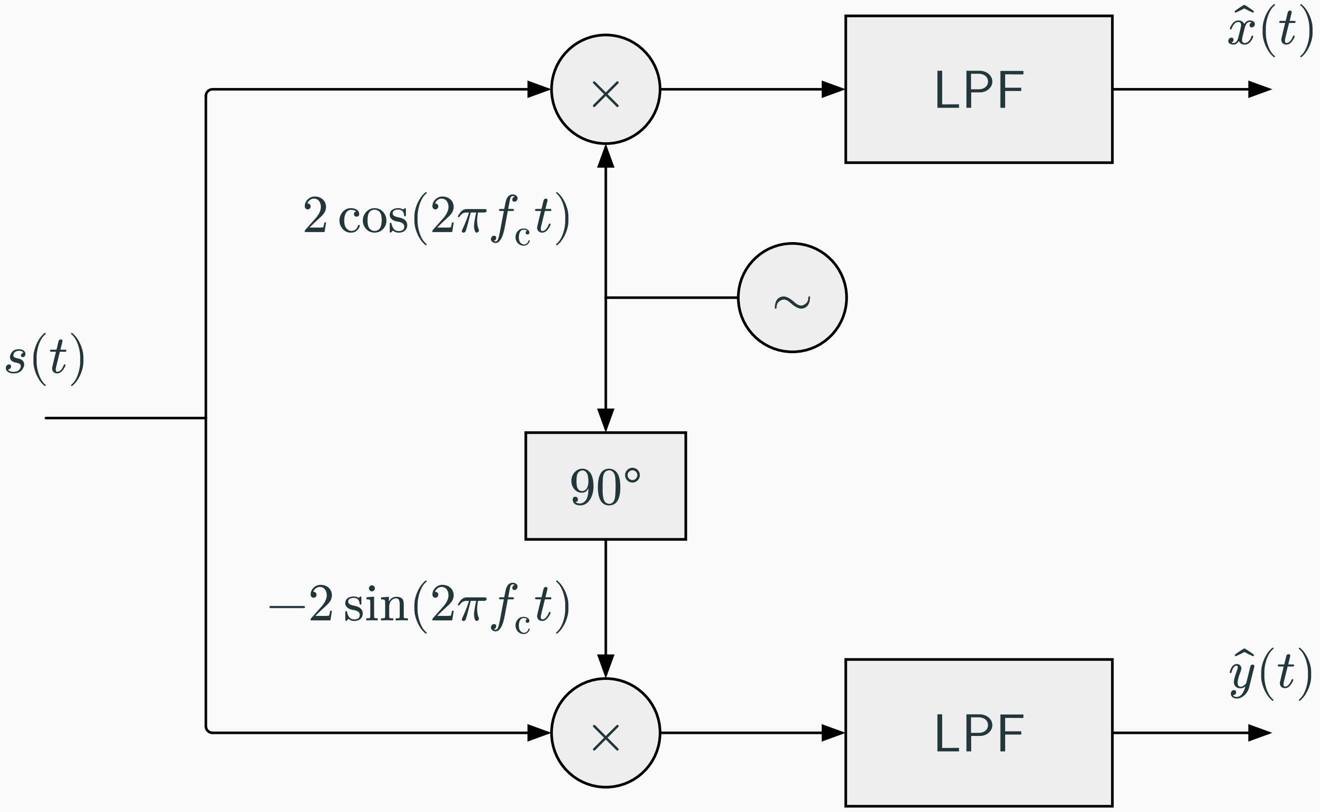
onde $x(t)$ e $y(t)$ são dois sinais em banda base.

Nomenclatura: $x(t)$ é o **componente em fase** e $y(t)$ é o **componente em quadratura**.

A modulação QC ocupa a mesma largura de banda que o caso DSB. No entanto, dois sinais são transmitidos simultaneamente e na mesma faixa de frequência. Assim, a eficiência é a mesma do caso SSB.

Observação: Esta técnica é bastante usada em comunicação digital. Mais detalhes no futuro.

Utiliza-se dois demoduladores DSB, com portadoras em quadratura.



A saída do multiplicador do ramo de cima é

$$
\begin{aligned}
2s(t)\cos(2\pi f_c t) &= 2[x(t)\cos(2\pi f_c t) - y(t)\sin(2\pi f_c t)]\cos(2\pi f_c t) \\
&= 2x(t)\cos^2(2\pi f_c t) - 2y(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) \\
&= x(t) + x(t)\cos(2\pi 2 f_c t) - y(t)\sin(2\pi 2 f_c t),
\end{aligned}
$$

onde foram utilizadas as seguintes igualdades trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
2\cos^2(a) &= 1 + \cos(2a), \\
2\cos(a)\sin(a) &= \sin(2a).
\end{aligned}
$$

Portanto, na saída do filtro passa-baixa correspondente, temos $\hat{x}(t) = x(t)$.

Analogamente, no ramo de baixo, temos $\hat{y}(t) = y(t)$.

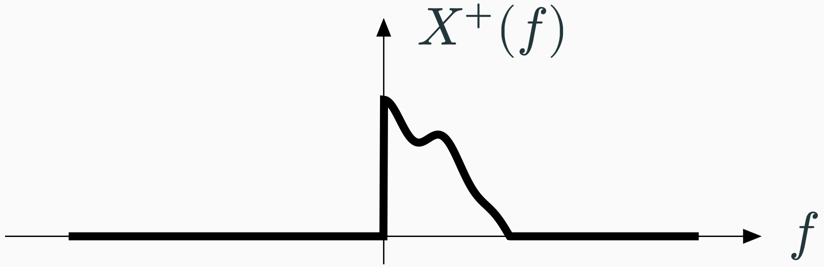
Expressão do SSB no domínio do tempo

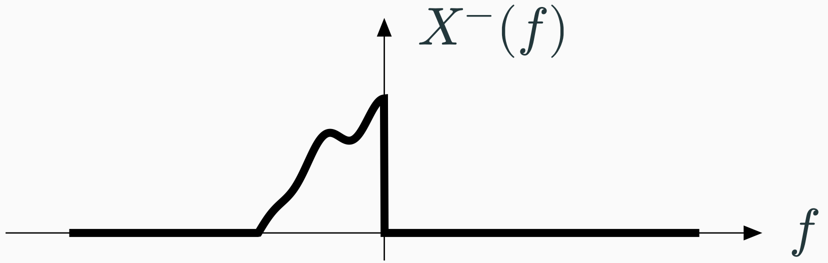
Neste momento estamos em condições de analisar a expressão no domínio do tempo de um sinal SSB. Sejam

$$X_+(f) = 2X(f)\,\mathrm{u}(f) \quad \text{e} \quad X_-(f) = 2X(f)\,\mathrm{u}(-f),$$

de modo que

$$X(f) = \frac{X_+(f) + X_-(f)}{2}.$$





Observação: Note que as formas de onda correpondentes no domínio do tempo são *complexas*!

Expressão do SSB no domínio do tempo

Por brevidade, consideraremos apenas o caso USB. Nesse caso, temos

$$S(f) = \frac{X_+(f - f_\mathrm{c}) + X_-(f + f_\mathrm{c})}{2},$$

de modo que

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \tfrac{1}{2}x_+(t)e^{+j2\pi f_\mathrm{c} t} + \tfrac{1}{2}x_-(t)e^{-j2\pi f_\mathrm{c} t},$$

onde

$$x_+(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_+(f)\} = x(t) \star \left(\delta(t) + j\frac{1}{\pi t}\right),$$

$$x_-(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_-(f)\} = x(t) \star \left(\delta(t) - j\frac{1}{\pi t}\right).$$

Transformada de Hilbert

Definição. A **transformada de Hilbert** de um sinal $x(t)$ é definida por

$$x_{\mathrm{H}}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) \star \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} \, \mathrm{d}\tau.$$

Com esta definição:

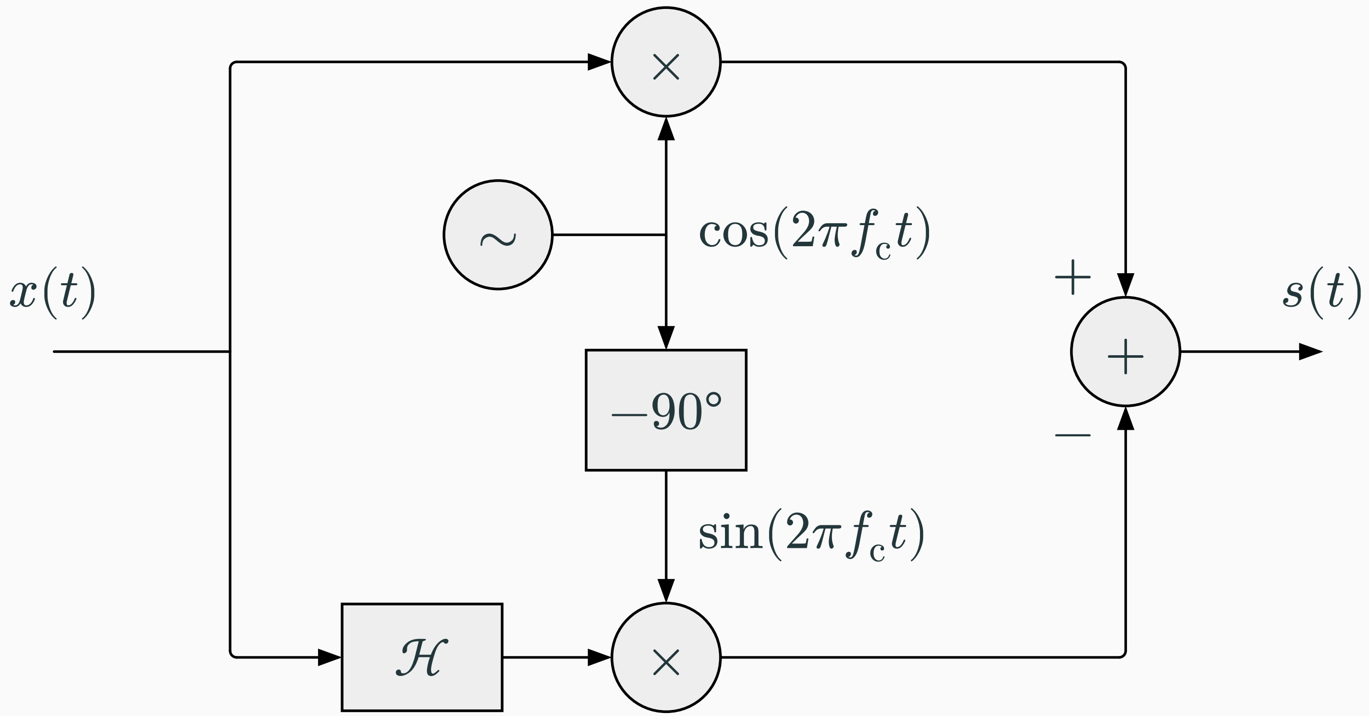
$$x_+(t) = x(t) + j x_{\mathrm{H}}(t),$$
$$x_-(t) = x(t) - j x_{\mathrm{H}}(t).$$

Finalmente,

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t) - x_{\mathrm{H}}(t) \sin(2\pi f_{\mathrm{c}} t).$$

Modulador SSB alternativo

Da discussão anterior, conclui-se que pode-se utilizar um modulador QC, com componente em fase $x(t)$ e componente em quadratura $x_{\mathrm{H}}(t)$.

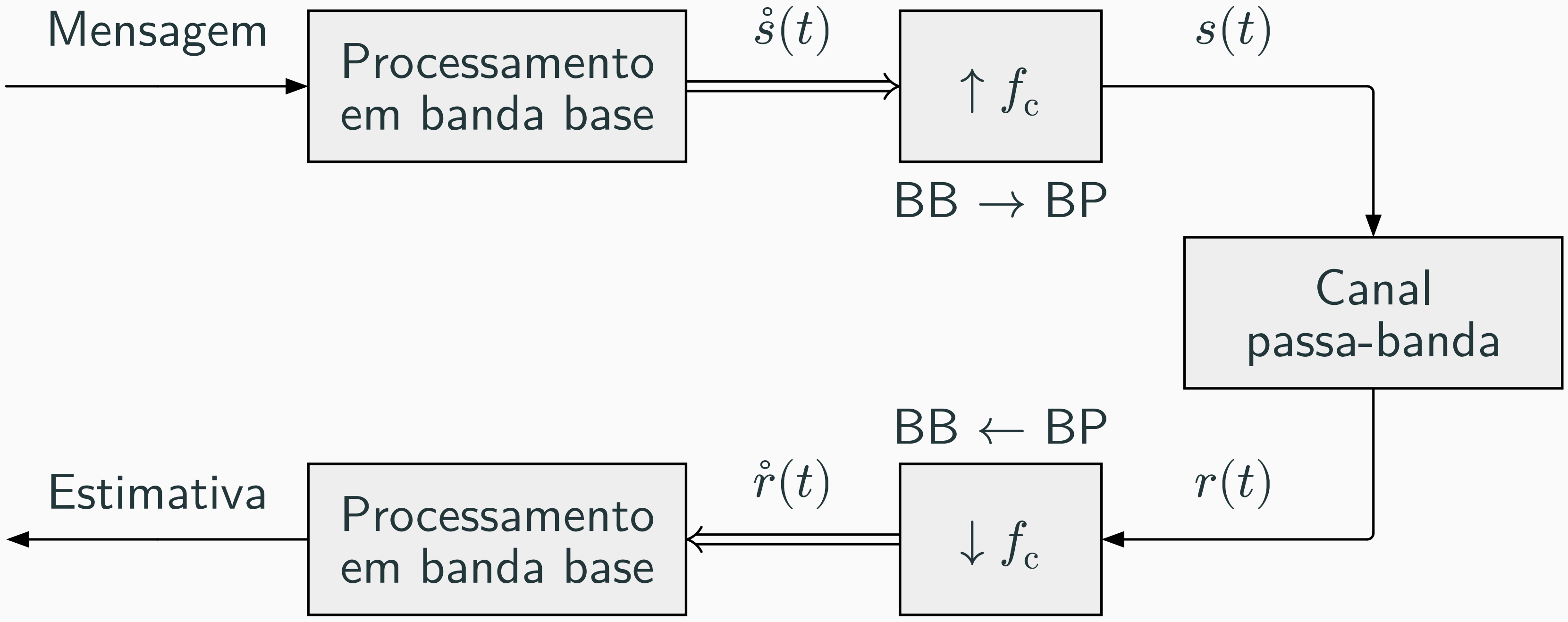


Exercício

Analise o caso SSB-LSB.

Envoltória complexa

A envoltória complexa é uma generalização do conceito de *fasores* e permite a análise, a simulação e a implementação em banda base de grande parte do sistema.



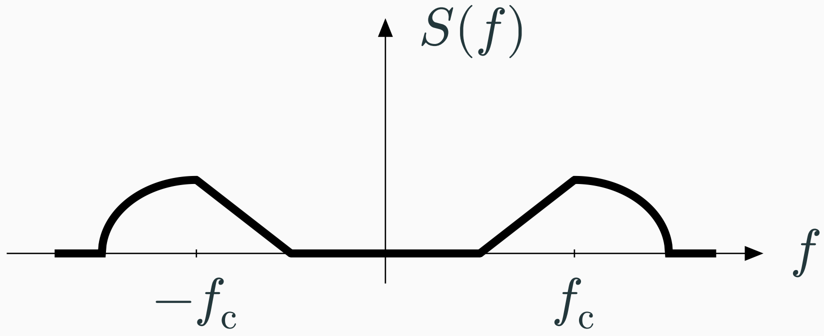
Benefícios:

- Processamento em banda base independente da frequência da portadora.
- Processamento digital com menor taxa de amostragem.

Preço a se pagar:

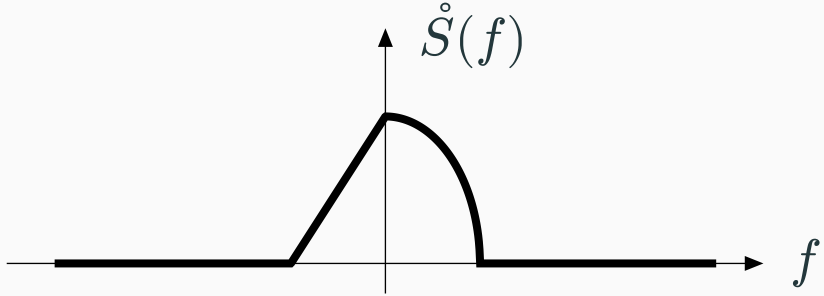
- Os sinais envolvidos passam a ser complexos.

Seja $s(t)$ um sinal real qualquer em *banda passante*.



$S(f)$ é sempre simétrico ao redor de $f = 0$, pois $s(t)$ é real, mas *não é* necessariamente simétrico ao redor de $f = f_\mathrm{c}$.

A *representação em banda base* de $s(t)$ com relação à frequência f_c, chamada de **envoltória complexa** de $s(t)$ e denotada por $\mathring{s}(t)$, é definida como sendo o sinal com o espectro abaixo.



Em geral, $\mathring{s}(t)$ é um *sinal complexo*.

Representação em banda base de sinais em banda passante

Matematicamente, primeiro definimos

$$S_+(f) = 2S(f)\,\mathrm{u}(f)$$

e depois

$$\mathring{S}(f) = S_+(f + f_\mathrm{c}).$$

Observação: O fator 2 na definição de $S_+(f)$ é arbitrário (comodidade matemática).

Seja $s_+(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_+(f)\}$. Então,

$$s_+(t) = s(t) + js_{\mathrm{H}}(t),$$

onde $s_{\mathrm{H}}(t) = \mathcal{H}\{s(t)\}$ é a transformada de Hilbert de $s(t)$.

Demonstração: Tem-se

$$\begin{aligned} s_+(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{2S(f)\,\mathrm{u}(f)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} \star \mathcal{F}^{-1}\{2\,\mathrm{u}(f)\} \\ &= s(t) \star \left[\delta(t) + j\frac{1}{\pi t}\right] \\ &= s(t) + js_{\mathrm{H}}(t), \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Uma primeira consequência desse lema é que

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathring{s}(t)e^{j2\pi f_\mathrm{c} t}\right\},$$

exatamente como na teoria de fasores.

Demonstração: Temos que

$$\mathring{s}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathring{S}(f)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_+(f + f_\mathrm{c})\} = s_+(t)e^{-j2\pi f_\mathrm{c} t},$$

ou seja,

$$s_+(t) = \mathring{s}(t)e^{j2\pi f_\mathrm{c} t},$$

e o resultado segue tomando a parte real dos dois lados da equação. ■

Representação retangular: componentes em fase e em quadratura

Expressando $\mathring{s}(t)$ em coordenadas retangulares, obtemos

$$\mathring{s}(t) = s_{\mathrm{I}}(t) + j s_{\mathrm{Q}}(t),$$

onde

- $s_{\mathrm{I}}(t) = \mathrm{Re}\{\mathring{s}(t)\}$ é o **componente em fase** de $s(t)$
- $s_{\mathrm{Q}}(t) = \mathrm{Im}\{\mathring{s}(t)\}$ é o **componente em quadratura** de $s(t)$.

Pode-se mostrar então que

$$s(t) = s_{\mathrm{I}}(t) \cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t) - s_{\mathrm{Q}}(t) \sin(2\pi f_{\mathrm{c}} t).$$

Observação: Os termos em inglês são *in-phase* (I) e *quadrature* (Q). Não confundir o I com "imaginário".

Representação polar: amplitude e fase instantâneas

Expressando $\mathring{s}(t)$ em coordenadas polares, obtemos

$$\mathring{s}(t) = A(t)e^{j\theta(t)}.$$

onde

- $A(t) = |\mathring{s}(t)|$ é a **amplitude instantânea** de $s(t)$ e
- $\theta(t) = \angle\mathring{s}(t)$ é a **fase instantânea** de $s(t)$.

Nesse caso, pode-se mostrar que

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f_\mathrm{c} t + \theta(t)).$$

Observação: A amplitude instantânea $A(t)$ também é chamada de *envoltória* de $s(t)$. Não confundir com a *envoltória complexa* de $s(t)$, que é $\mathring{s}(t)$.

Demonstração

Da relação fasorial, temos que primeiro que

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathrm{Re}\Big\{\mathring{s}(t)e^{j2\pi f_\mathrm{c} t}\Big\} \\ &= \mathrm{Re}\Big\{\big[s_\mathrm{I}(t) + j s_\mathrm{Q}(t)\big]\big[\cos(2\pi f_\mathrm{c} t) + j\sin(2\pi f_\mathrm{c} t)\big]\Big\} \\ &= s_\mathrm{I}(t)\cos(2\pi f_\mathrm{c} t) - s_\mathrm{Q}(t)\sin(2\pi f_\mathrm{c} t), \end{aligned}$$

e depois que

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathrm{Re}\Big\{\mathring{s}(t)e^{j2\pi f_\mathrm{c} t}\Big\} \\ &= \mathrm{Re}\Big\{A(t)e^{j\theta(t)}e^{j2\pi f_\mathrm{c} t}\Big\} \\ &= \mathrm{Re}\Big\{A(t)e^{j(2\pi f_\mathrm{c} t + \theta(t))}\Big\} \\ &= A(t)\cos(2\pi f_\mathrm{c} t + \theta(t)), \end{aligned}$$

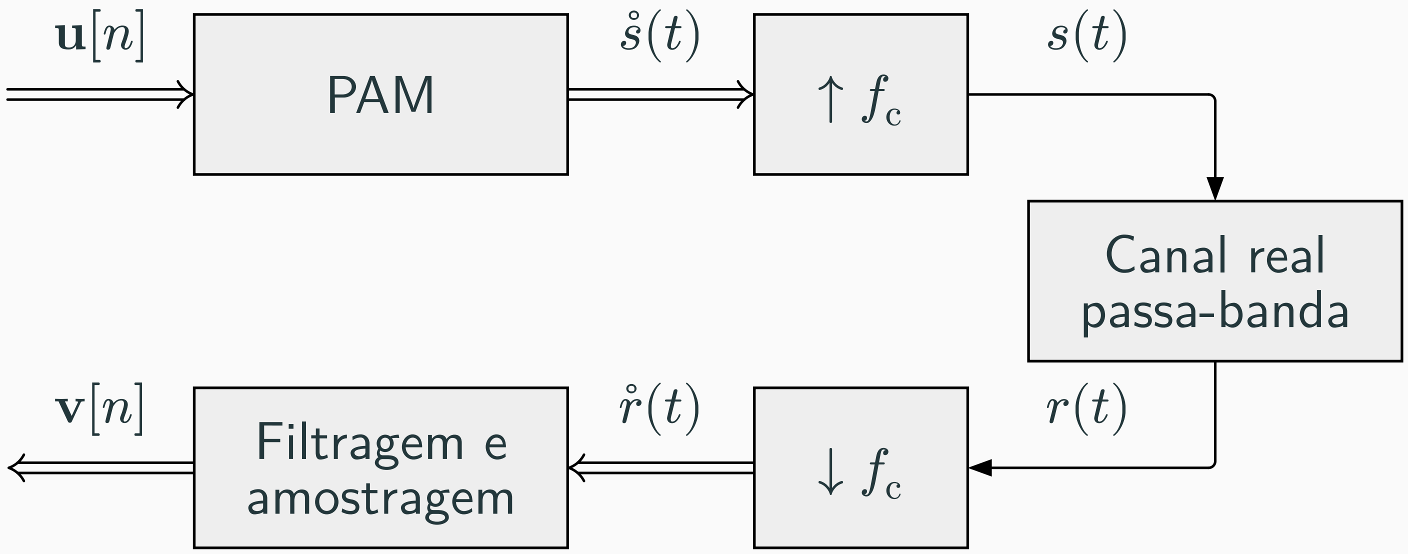
como desejado. ∎

PAM complexo

Suponha que o sinal equivalente em banda base seja da forma “PAM”, isto é,

$$\mathring{s}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{u}[n]p(t - nT_{\mathrm{s}}),$$

onde $\mathbf{u}[n]$ é uma *sequência de números complexos* e $p(t)$ um pulso real qualquer.



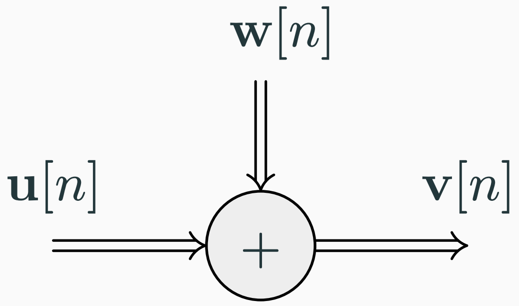
Analogamente ao caso real, no caso de filtragem casada e pulso de Nyquist, temos

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{u}[n] + \mathbf{w}[n],$$

onde $\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}_\mathrm{I}[n] + j\mathbf{w}_\mathrm{Q}[n]$ é *ruído gaussiano branco discreto complexo*, com

$$\mathbf{w}_\mathrm{I}[n] \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Normal}(0, N_0/2) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w}_\mathrm{Q}[n] \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Normal}(0, N_0/2),$$

sendo $\mathbf{w}_\mathrm{I}[n]$ e $\mathbf{w}_\mathrm{Q}[n]$ independentes entre si.

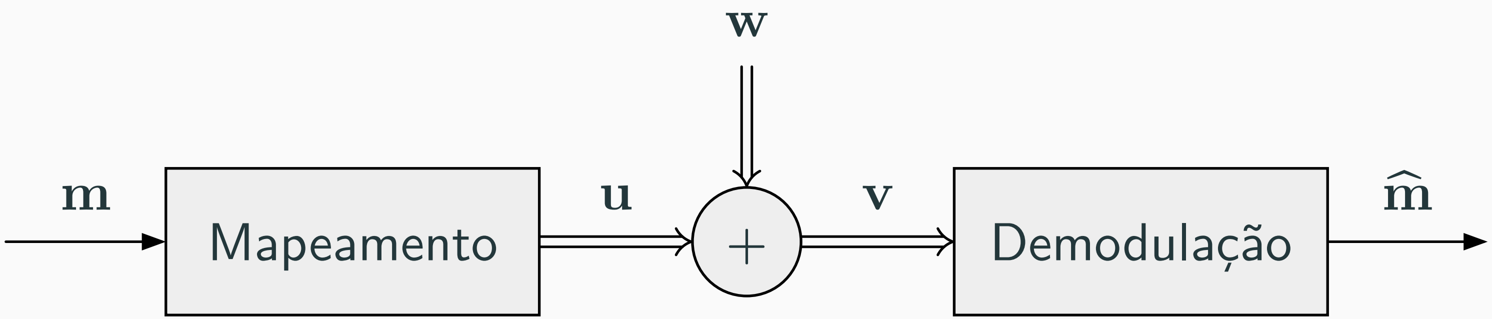


Constelações complexas

Constelações complexas

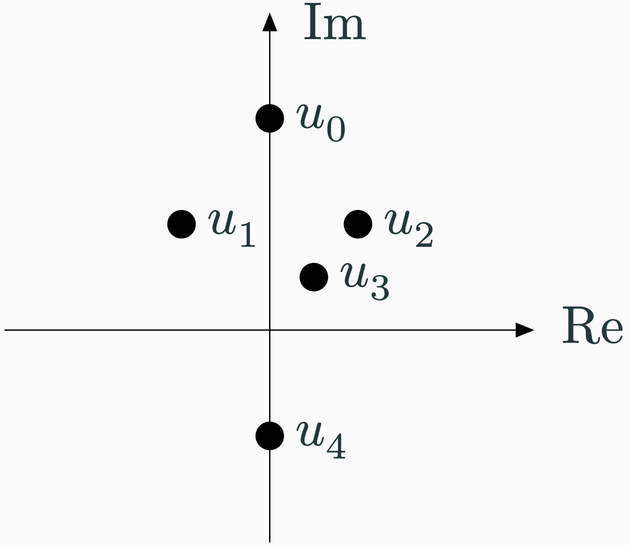
Voltando nossa atenção para comunicação digital e relembrando as constelações M-PAM...

A ideia é, novamente, generalizar de real para complexo.



Exercício

Considere a constelação $\mathcal{U} = [j4, -2 + j2, 2 + j2, 1 + j1, -j2]$ mostrada abaixo.



(a) Determine a média e a energia média da constelação, supondo mensagens equiprováveis.

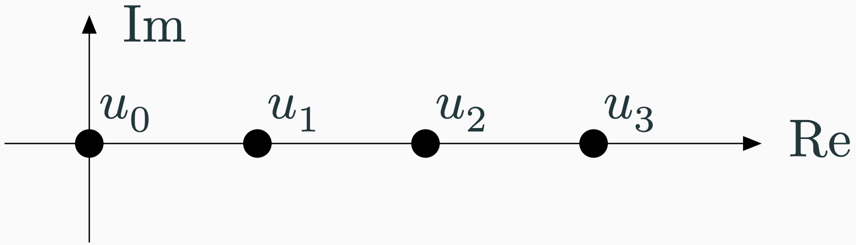
(b) Supondo a sequência de mensagens $\mathbf{m}[n] = [0, 1, 1, 4, 3...]$, esboce as componentes em fase e em quadratura, bem como a amplitude e a fase instantâneas. Assuma taxa de símbolos de $50\,\mathrm{kbaud}$.

Constelação ASK

Na **constelação M-ASK** (amplitude-shift keying) os símbolos são definidos por

$$u_i = i\alpha, \quad i \in [0 : M),$$

onde α é um valor de *amplitude base*. Por exemplo, para $M = 4$:



Observações:

- Uma alternativa seria considerar também símbolos negativos (apesar de que, nesse caso, a fase também carregaria informação).
- O caso particular $M = 2$ é conhecido como **OOK** (on-off keying).

Constelação ASK

Para a constelação M-ASK com símbolos equiprováveis, a *média* é dada por

$$\mu_{\mathrm{s}} = \alpha \frac{M-1}{2},$$

a *energia média* é dada por

$$E_{\mathrm{s}} = \alpha^2 \frac{(M-1)(2M-1)}{6},$$

e a *distância mínima* é dada por

$$d_{\min} = \frac{\alpha}{2}.$$

1. Verifique as fórmulas do slide anterior para o caso $M = 4$.

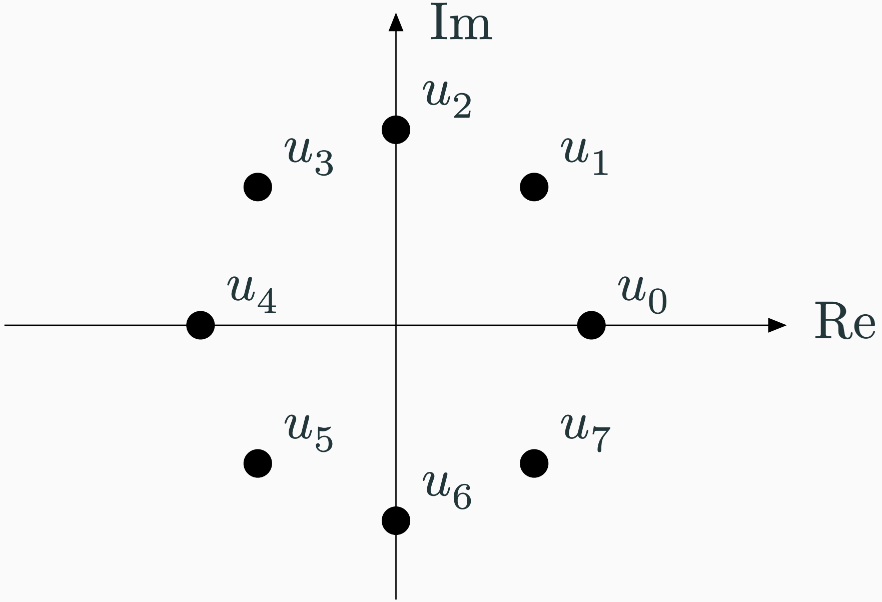
2. Considere um sistema de comunicação em banda passante que emprega 4-ASK com frequência da portadora de $200\,\mathrm{kHz}$. O sistema transmite símbolos equiprováveis à taxa de símbolos de $50\,\mathrm{kbaud}$ e opera com potência média de transmissão de $0.437\,5\,\mathrm{V}^2$. Esboce o sinal transmitido (em banda passante) referente à sequência de mensagens $\mathbf{m}[n] = [2, 0, 1, 1]$.

Constelação PSK

Na **constelação M-PSK** (phase-shift keying) os símbolos são definidos por

$$u_i = \alpha e^{j2\pi i/M}, \quad i \in [0 : M),$$

onde α é um valor de amplitude. Por exemplo, para $M = 8$:



Constelação PSK

Para a constelação M-PSK com símbolos equiprováveis, a *média* é dada por

$$\mu_{\mathrm{s}} = 0,$$

a *energia média* é dada por,

$$E_{\mathrm{s}} = \alpha^2,$$

e a *distância mínima* é dada por

$$d_{\min} = 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{M}\right).$$

Casos particulares de grande importância:

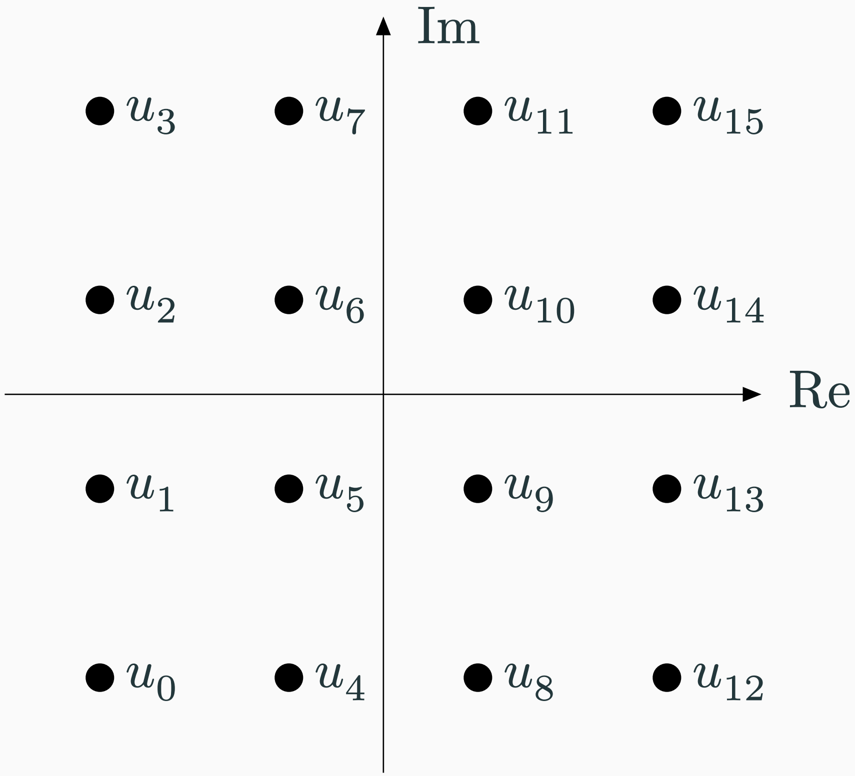
- 2-PSK ou **BPSK**: $\mathcal{U} = \{\alpha, -\alpha\}$ (constelação puramente real).
- 4-PSK ou **QPSK**: $\mathcal{U} = \{\alpha, j\alpha, -\alpha, -j\alpha\}$.

Exercícios

1. Demonstre a fórmula da distância mínima do slide anterior.
2. Considere um sistema de comunicação em banda passante que emprega QPSK com frequência da portadora de $200\,\mathrm{kHz}$. O sistema transmite símbolos equiprováveis à taxa de símbolos de $50\,\mathrm{kbaud}$ e opera com potência média de transmissão de $0.18\,\mathrm{V}^2$. Esboce o sinal transmitido (em banda passante) referente à sequência de mensagens $\mathbf{m}[n] = [2, 0, 1, 1]$.

Constelação QAM uniforme

A **constelação QAM** (quadrature amplitude modulation) **retangular** é definida pelo produto de duas constelações PAM uniformes. Por exemplo, para $M = 16$:



Assim como no caso real, a demodulação pode ser:

- *Soft*, na qual a saída do demodulador é a pmf a posteriori de $\mathbf{m}$, dado $\mathbf{v}$; ou
- *Hard*, na qual a saída do demodulador é a mensagem $\widehat{\mathbf{m}}$ mais provável, dado $\mathbf{v}$.

Para demodulação hard, e no caso particular de $\mathbf{m}$ uniforme, temos novamente que o *demodulador de mínima distância euclidiana* é ótimo:

$$\widehat{\mathbf{m}} = \operatorname*{argmin}_{m} |v - u_m|.$$

Regiões de Voronoi

Probabilidade de erro de símbolo

- Para M-ASK:
- Para M-PSK:
- Para M-QAM:

Aproximação de vizinhos

Uma aproximação popular para a probabilidade de erro de símbolo, válida para alta SNR, é dada por

$$P_{\mathrm{s}} \approx VQ\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right),$$

onde $d_{\min}$ é a *distância mínima* da constelação V é o *número médio de vizinhos* da constelação.

Referências

Referências

[1] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, 2008.

[2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4º ed. John Wiley & Sons, 2001.

[3] B. P. Lathi e Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 4º ed. Oxford University Press, 2009.

[4] J. G. Proakis e M. Salehi, *Digital Communications*, 5º ed. McGraw Hill, 2008.