Processos Estocásticos
Engenharia de Telecomunicações

Professor: Roberto Wanderley da Nóbrega Semestre: 2025.2

Lista de exercícios 1

1. Considere uma variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado.

- Se o resultado for ⚀ ou ⚁, então $X \sim \text{Uniform}([1, 4])$.
- Se o resultado for ⚂, então $X \sim \text{UniformDiscrete}(\{1, 2, 3\})$.
- Se o resultado for ⚃ ou ⚄, então $X \sim \text{Uniform}([-1, 2])$.
- Se o resultado for ⚅, então $X = 3$.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa de X.

(c) Determine a média de X.

(d) Determine $\Pr[X \geq 2]$.

2. Um sinal de trânsito permanece, alternadamente, 40 segundos aberto e 20 segundos fechado. Seja X a variável aleatória que caracteriza o tempo de espera de um motorista que passe por este sinal, em segundos.

(a) Determine e esboce a função densidade de probabilidade de X.

(b) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa de X.

(c) Determine o tempo de espera médio.

3. Considere uma variável aleatória Laplaciana X de média 0, cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-|x|/b},$$

onde $b > 0$ é um parâmetro de escala. Determine a função densidade de probabilidade e a variância da variável aleatória $Y = \text{clip}_a(X)$, onde

$$\text{clip}_a(x) = \begin{cases} -a, & \text{se } x < -a; \\ x, & \text{se } -a \leq x \leq a; \\ +a, & \text{se } x > a. \end{cases}$$

4. Sejam $B_1, B_2, B_3 \sim \text{Bern}(3/4)$ variáveis aleatórias sorteadas independentemente. Sejam

$$X = B_1 + B_2 + B_3, \quad \text{e} \quad Y = B_1 B_2 B_3.$$

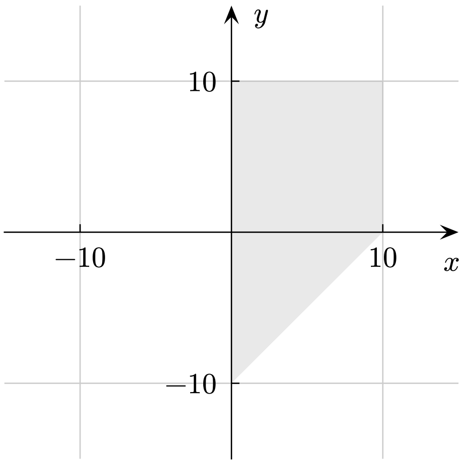
(a) Determine a função massa de probabilidade conjunta de X e Y .

(b) Determine e esboce as funções massa de probabilidade marginais de X e Y.

(c) Determine e esboce as funções massa de probabilidade condicionais de X dado que $Y = y$, para $y = 0$ e para $y = 1$.

(d) Determine a covariância entre X e Y.

5. Considere duas variáveis aleatórias X e Y com função densidade de probabilidade conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.



(a) Determine o valor da constante k.

(b) Determine $\Pr[X \geq Y]$.

(c) Determine e esboce a função densidade de probabilidade marginal de Y.

(d) Determine e esboce a função de distribuição cumulativa marginal de Y.

(e) Determine e esboce a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = 5$.

(f) Determine a covariância entre X e Y.

6. Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja X a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e Y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.

(a) Determine a função densidade de probabilidade marginal de X. Esboce.

(b) Determine a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = x$. Esboce para $x = 1/4$ e $x = 3/4$.

(c) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y. Esboce a região do plano em que a densidade conjunta é não-nula.

(d) Determine a função densidade de probabilidade marginal de Y. Esboce.

(e) Determine a função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y$. Esboce para $y = 1/4$ e $y = 3/4$.

(f) Determine as médias de X e de Y.

(g) Determine as variâncias de X e de Y.

(h) Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

7. Sejam $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Uniform}([-1, 2])$ variáveis aleatórias **contínuas** sorteadas independentemente.

(a) Sejam

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \\ Y_2 &= X_1 X_2 \\ Y_3 &= X_1 X_2 X_3 \end{aligned}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Y} = [Y_1 \;\; Y_2 \;\; Y_3]^{\mathsf{T}}$.

(b) Sejam

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1 \\ Z_2 &= Y_1 + Y_2 \\ Z_3 &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \end{aligned}$$

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório $\vec{Z} = [Z_1 \;\; Z_2 \;\; Z_3]^{\mathsf{T}}$. **Utilize a formulação matricial.**