

# Processos Estocásticos

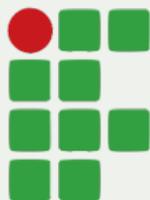
Variáveis aleatórias mistas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO  
FEDERAL**  
Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

# Função impulso

## Definição

A **função impulso unitário** ou **função delta de Dirac** é definida como

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_{\epsilon}(x),$$

onde

$$d_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

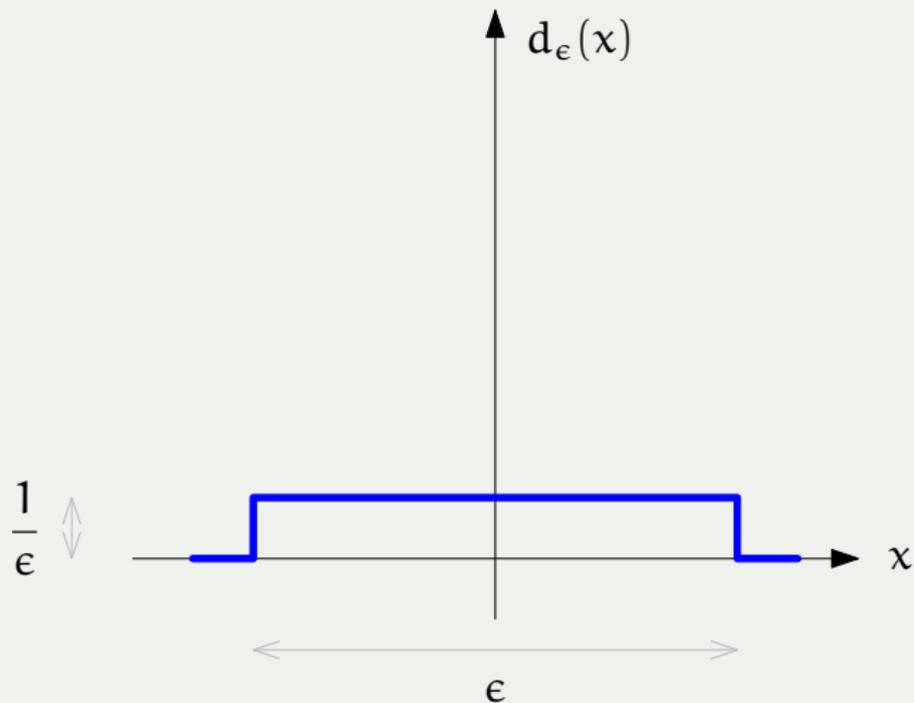
é um retângulo centrado na origem de largura  $\epsilon$  e altura  $1/\epsilon$ .



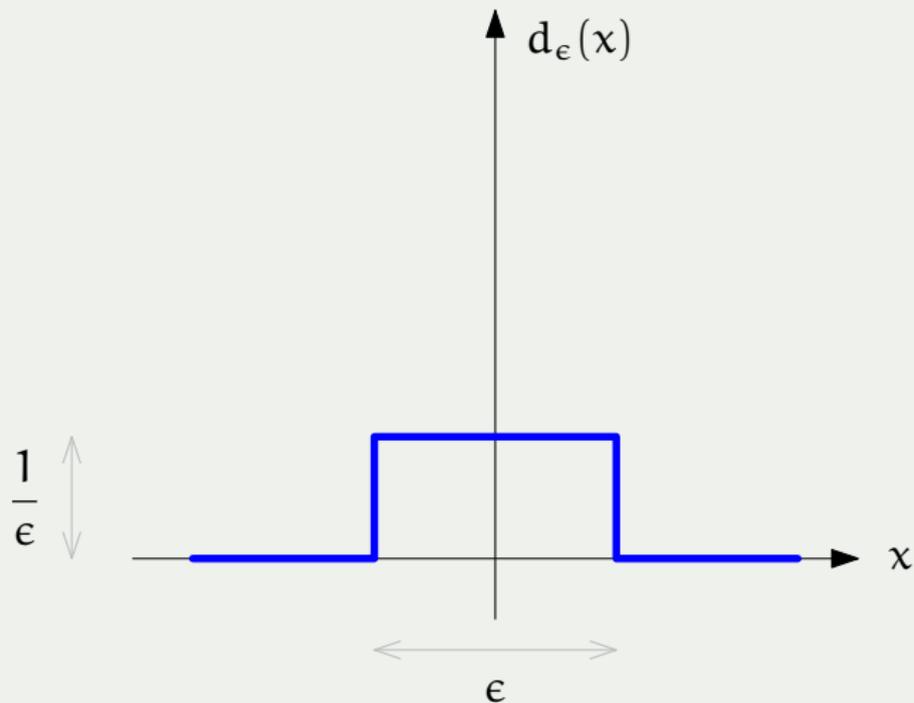
P.A.M. Dirac  
(1902–1984)



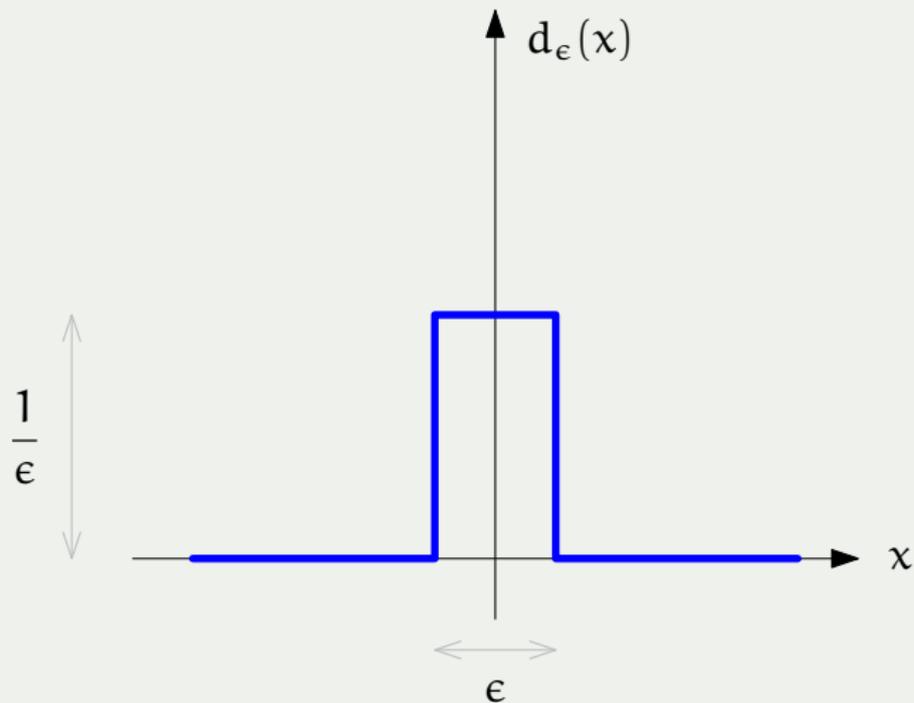
# Função impulso: Ilustração



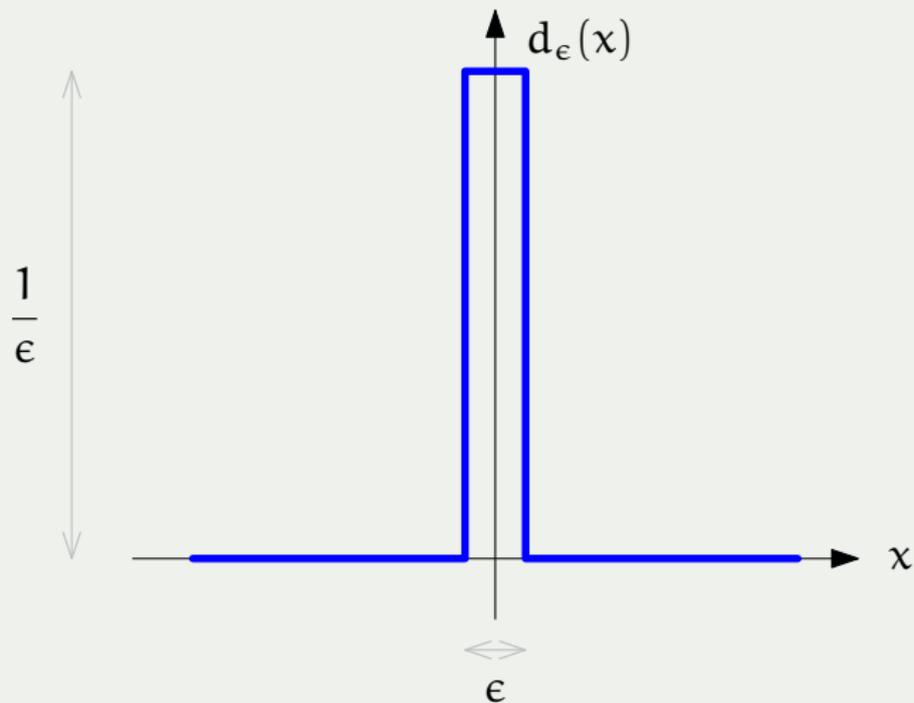
# Função impulso: Ilustração



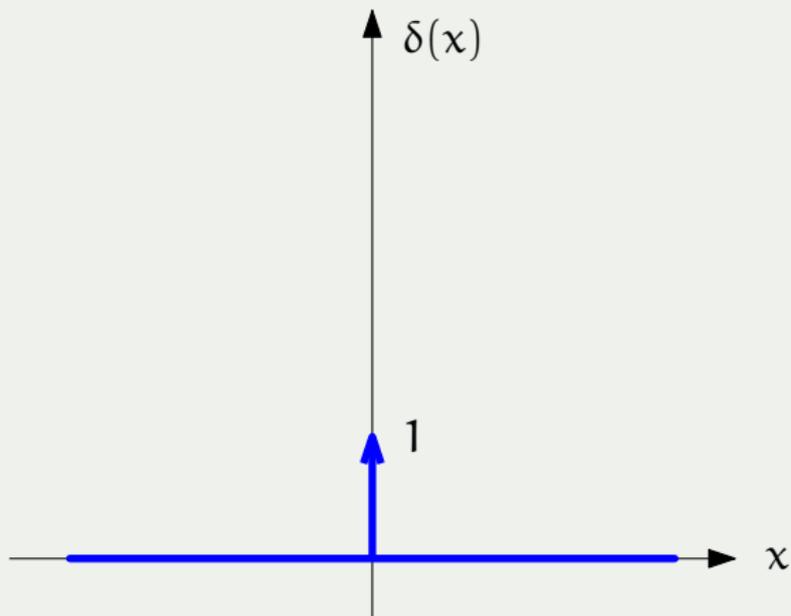
# Função impulso: Ilustração



# Função impulso: Ilustração

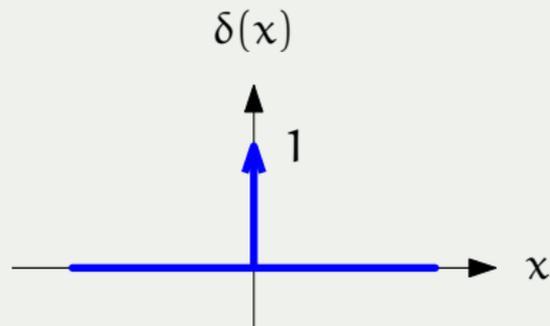


# Função impulso: Ilustração



## Função impulso: Propriedades

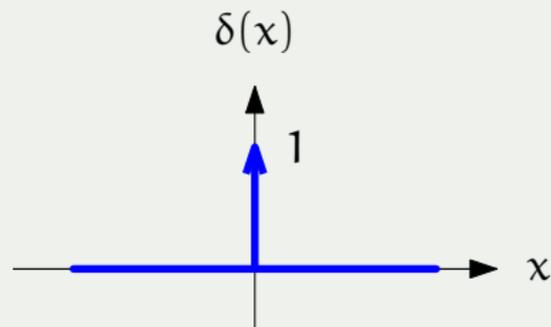
$$1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$



## Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

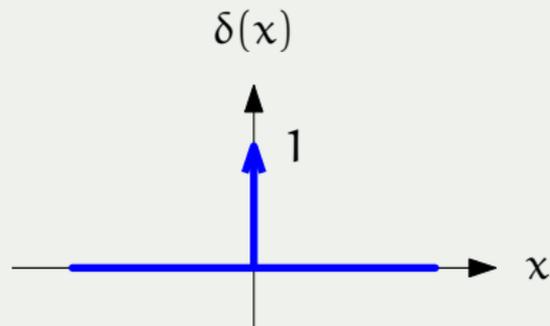
$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv$$



# Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

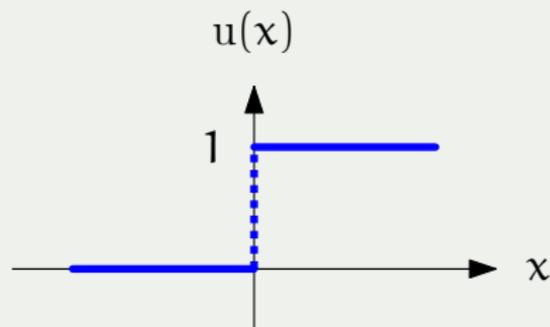
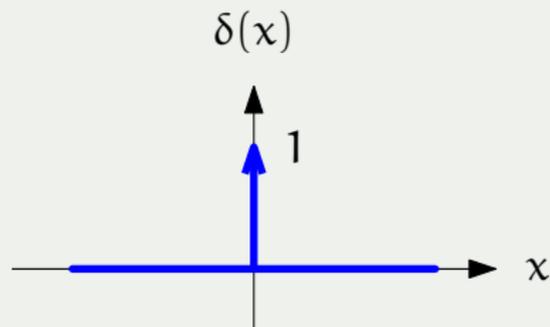
$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$



# Função impulso: Propriedades

$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

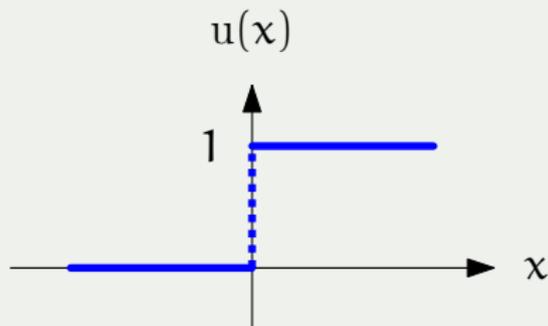
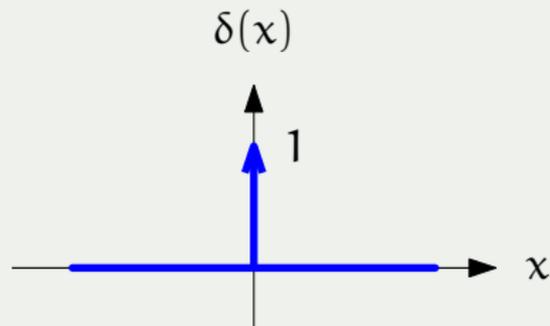


# Função impulso: Propriedades

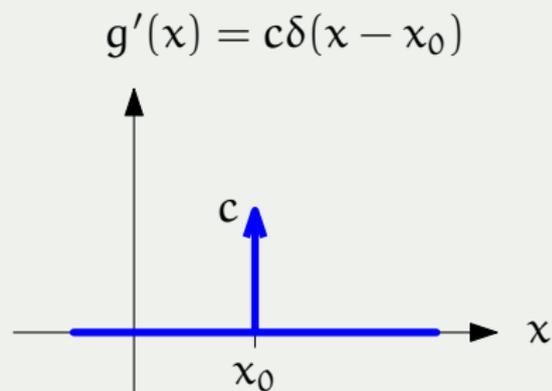
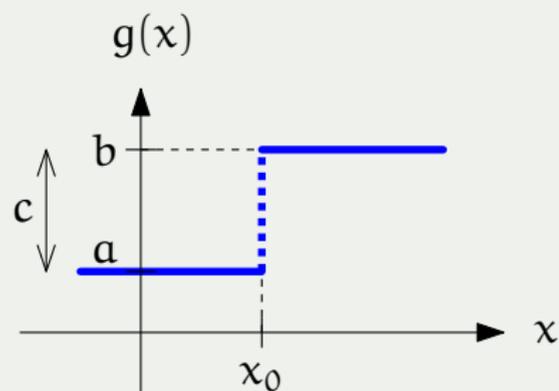
$$1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1$$

$$2 \quad \int_{-\infty}^x \delta(v) dv = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} = u(x)$$

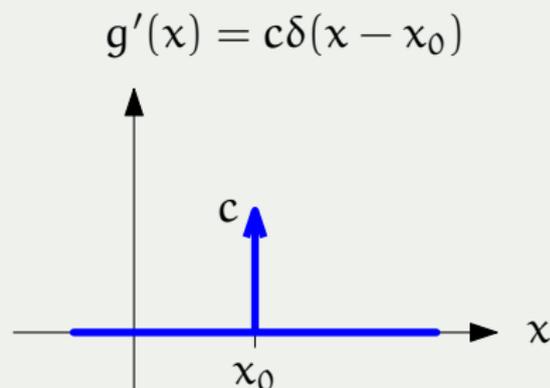
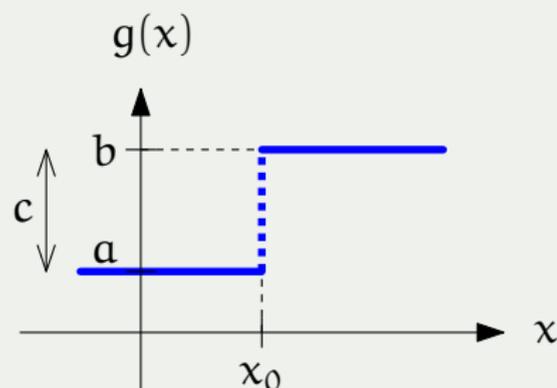
$$3 \quad \frac{d}{dx} u(x) = u'(x) = \delta(x)$$



Generalizando:



Generalizando:



A derivada de uma **descontinuidade** de salto  $c$  é um **impulso** de área  $c$ .



# PDF para VAs discretas

É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

### Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

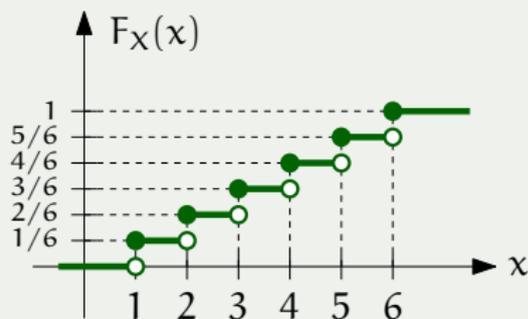
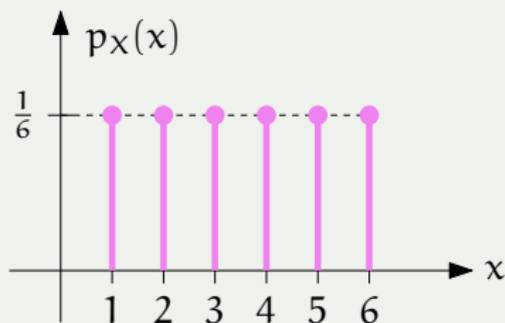


É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

## Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

Já conhecemos a PMF e a CDF de  $X$ :

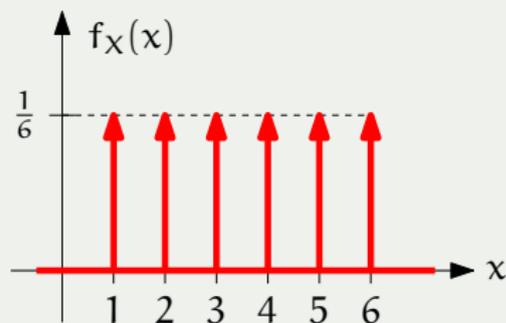
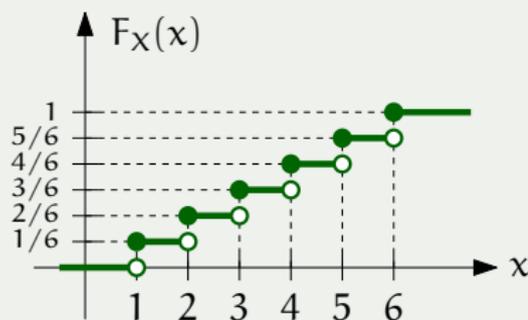


É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

## Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

Sabendo que  $f_X(x) = F'_X(x)$ , obtemos a PDF de  $X$ :



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

### Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

### Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in \mathcal{S}_X} p_X(u)\delta(x-u)$$



É possível atribuir PDFs a VAs discretas utilizando a função impulso.

### Exemplo

Seja  $X \sim \text{Unif}(\{1, 2, \dots, 6\})$ . Determine a PDF de  $X$ .

Algebricamente:

$$f_X(x) = \frac{1}{6}\delta(x-1) + \frac{1}{6}\delta(x-2) + \dots + \frac{1}{6}\delta(x-6)$$

De modo geral:

$$f_X(x) = \sum_{u \in \mathcal{S}_X} p_X(u)\delta(x-u)$$



Basta substituir **massas** por **impulsos**.



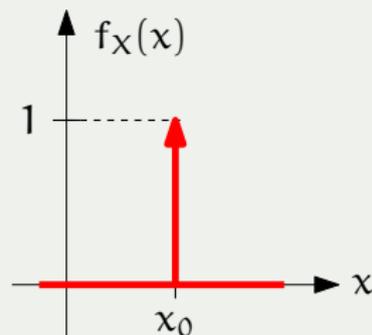
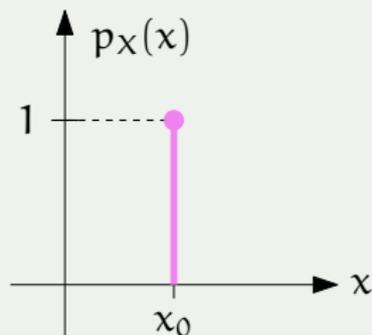
## Exemplo

Seja  $X = x_0$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}$  é uma constante (i.e.,  $X$  é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de  $X$ .



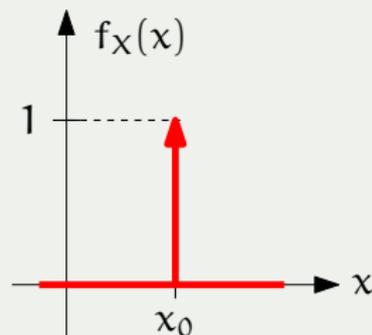
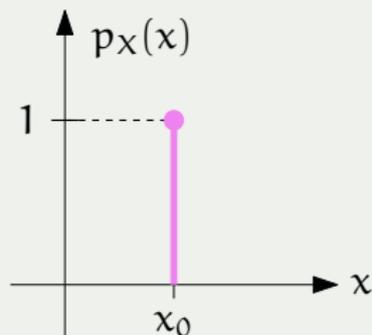
## Exemplo

Seja  $X = x_0$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}$  é uma constante (i.e.,  $X$  é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de  $X$ .



## Exemplo

Seja  $X = x_0$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}$  é uma constante (i.e.,  $X$  é uma variável aleatória determinística). Determine a PDF de  $X$ .



$$f_X(x) = \delta(x - x_0)$$



# Variáveis aleatórias mistas

## Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.



## Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta* e *parte contínua*.



A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.



## Definição

Uma **variável aleatória mista** é uma VA que possui *parte discreta e parte contínua*.



A PDF de uma VA mista possui tanto **impulsos** quanto trechos de **densidade finita**.



A CDF de uma VA mista possui tanto **descontinuidades** quanto trechos contínuos **estritamente crescentes**.



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

## Exemplo

Seja  $U \sim \text{Unif}([0, 4])$ . Seja  $X$  uma VA definida da seguinte maneira:

- Se  $U \leq 1$ , então  $X \sim \text{Unif}([0, 2])$ .
- Caso contrário, então  $X \sim \text{Bern}(2/3)$ .

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de  $X$ .

## Intuição:

u	3.34	3.78	3.12	3.30	0.43	3.27	3.37	3.65	1.72	2.27	1.49	0.33	2.72	1.91	1.45	0.85	1.14	0.10
x	1.00	0.00	0.00	1.00	0.83	0.00	1.00	1.00	1.00	0.00	1.00	1.37	1.00	1.00	1.00	1.04	1.00	1.38

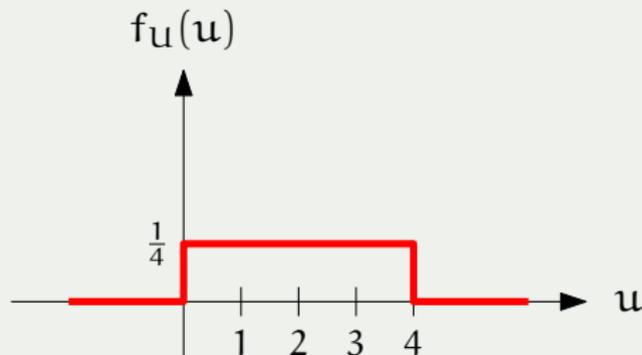


## Exemplo

Seja  $U \sim \text{Unif}([0, 4])$ . Seja  $X$  uma VA definida da seguinte maneira:

- Se  $U \leq 1$ , então  $X \sim \text{Unif}([0, 2])$ .
- Caso contrário, então  $X \sim \text{Bern}(2/3)$ .

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de  $X$ .

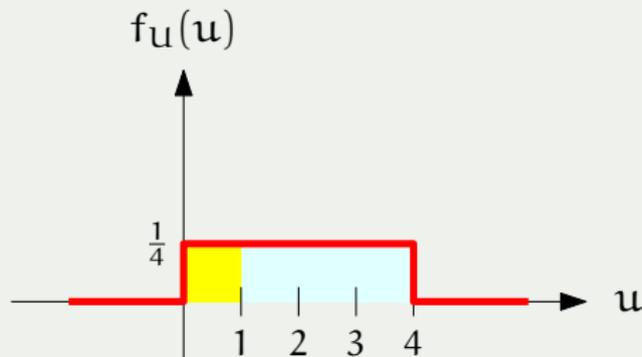


## Exemplo

Seja  $U \sim \text{Unif}([0, 4])$ . Seja  $X$  uma VA definida da seguinte maneira:

- Se  $U \leq 1$ , então  $X \sim \text{Unif}([0, 2])$ .
- Caso contrário, então  $X \sim \text{Bern}(2/3)$ .

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de  $X$ .



$$\Pr[U \leq 1] = \frac{1}{4}$$

$$\Pr[U > 1] = \frac{3}{4}$$



### Exemplo

Seja  $U \sim \text{Unif}([0, 4])$ . Seja  $X$  uma VA definida da seguinte maneira:

- Se  $U \leq 1$ , então  $X \sim \text{Unif}([0, 2])$ .
- Caso contrário, então  $X \sim \text{Bern}(2/3)$ .

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de  $X$ .

**PDF:**

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = f_X(x | U \leq 1) \Pr[U \leq 1] + f_X(x | U > 1) \Pr[U > 1]$$



## Exemplo

Seja  $U \sim \text{Unif}([0, 4])$ . Seja  $X$  uma VA definida da seguinte maneira:

- Se  $U \leq 1$ , então  $X \sim \text{Unif}([0, 2])$ .
- Caso contrário, então  $X \sim \text{Bern}(2/3)$ .

Determine a PDF, a CDF e o valor esperado de  $X$ .

**PDF:**

Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$



## Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

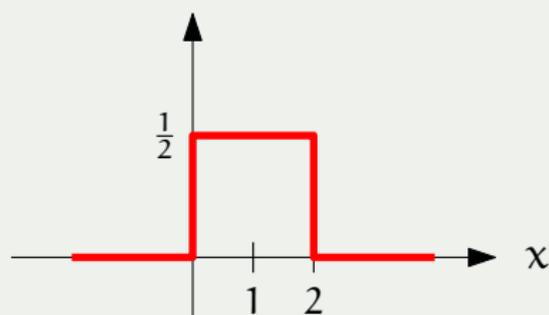
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$



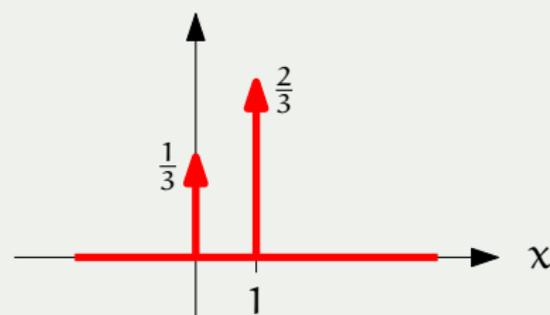
## Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$f_X(x \mid U \leq 1)$



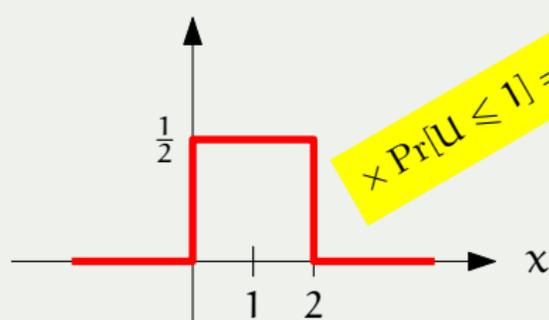
$f_X(x \mid U > 1)$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

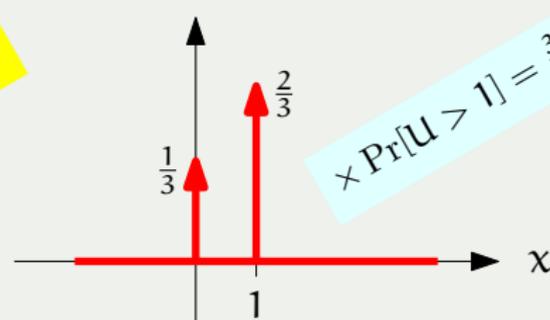
$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x | U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x | U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$f_X(x | U \leq 1)$



$$\frac{1}{2} [0 \leq x \leq 2]$$

$f_X(x | U > 1)$



$$\frac{1}{3} \delta(x) + \frac{2}{3} \delta(x - 1)$$



## Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$



## Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x \mid U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x \mid U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8}[0 \leq x \leq 2] + \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

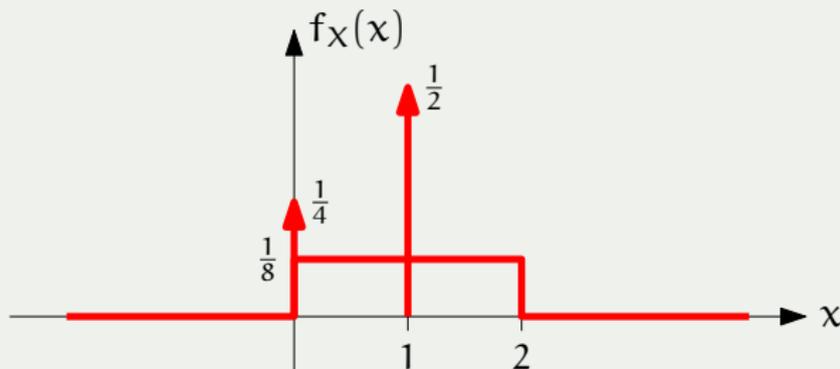


## Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

$$f_X(x) = \underbrace{f_X(x | U \leq 1)}_{\sim \text{Unif}([0,2])} \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{f_X(x | U > 1)}_{\sim \text{Bern}(2/3)} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}[0 \leq x \leq 2] \times \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{3}\delta(x) + \frac{2}{3}\delta(x-1) \right) \times \frac{3}{4}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8}[0 \leq x \leq 2] + \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$



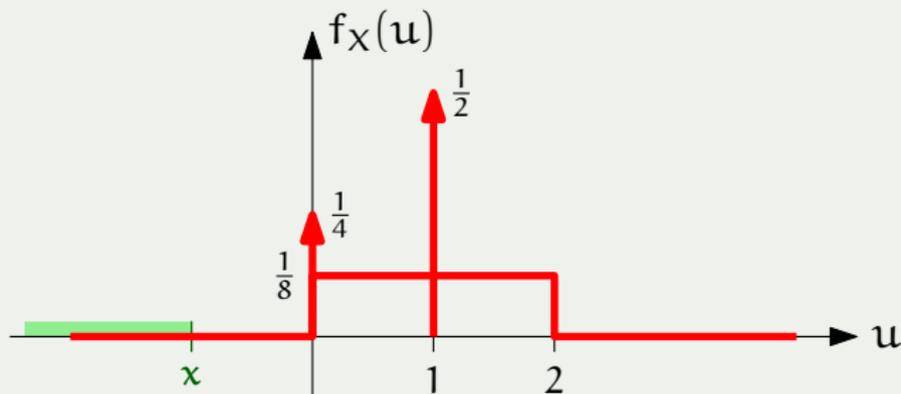
**CDF:**

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u) du$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



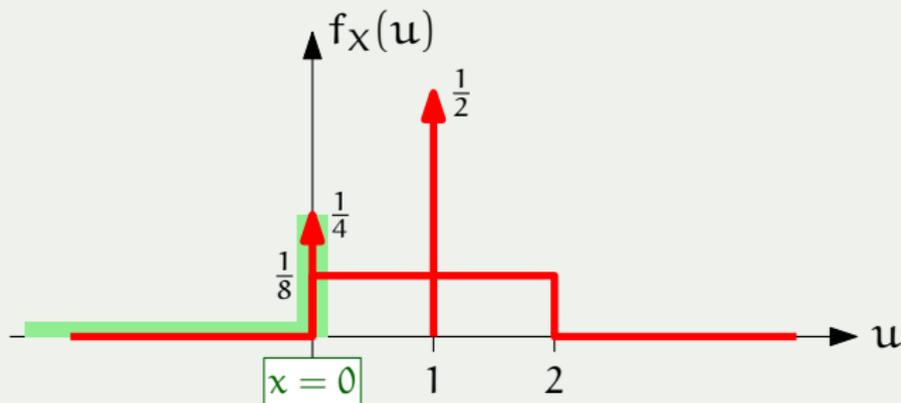
Caso  $x < 0$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^x 0 \, du}_0$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



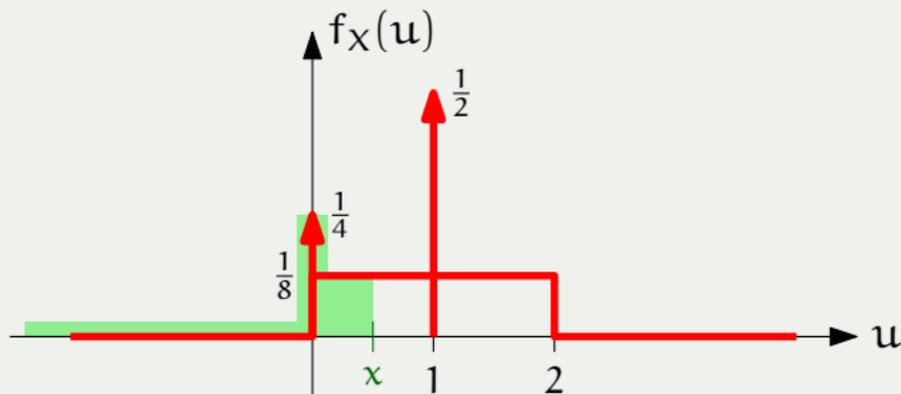
Caso  $x = 0$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



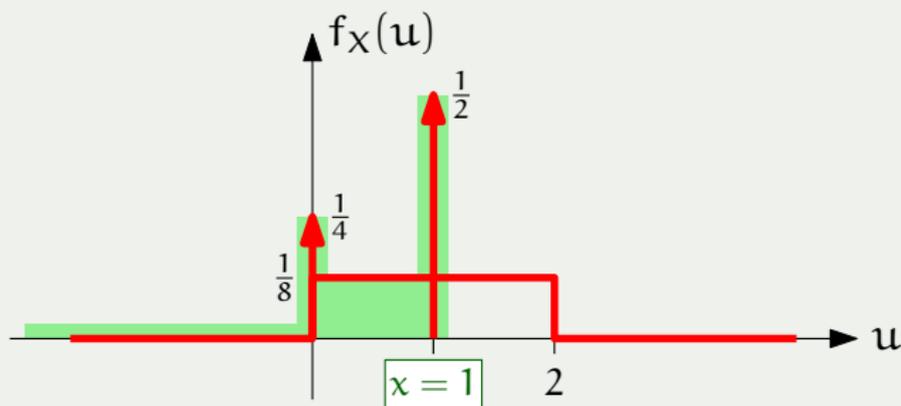
Caso  $0 < x < 1$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^x \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}x}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



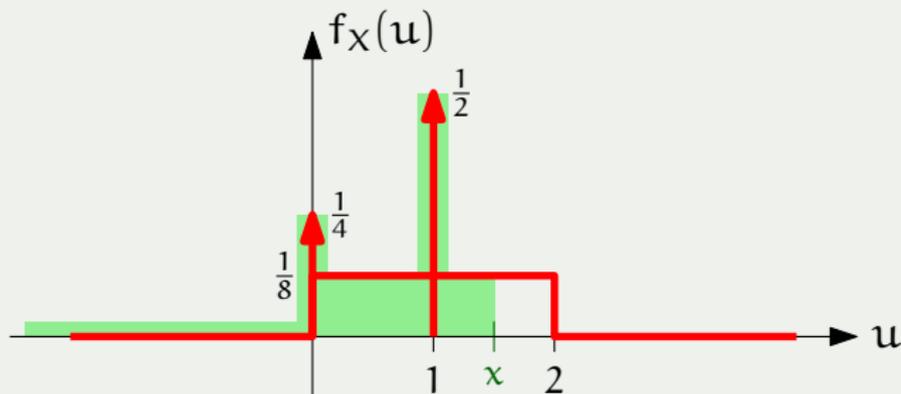
Caso  $x = 1$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



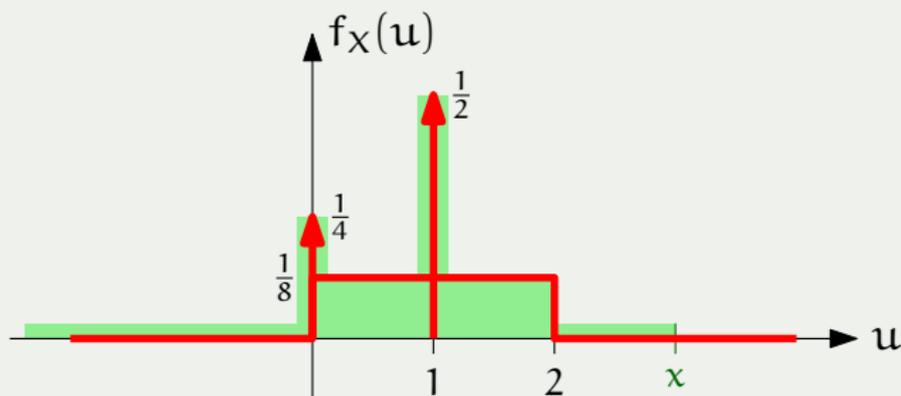
Caso  $1 < x < 2$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^x \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}(x-1)}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

CDF:



Caso  $x \geq 2$ :

$$F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} 0 \, du}_0 + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{4} \delta(u) \, du}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{1^-}^{1^+} \frac{1}{2} \delta(u-1) \, du}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{1^+}^2 \frac{1}{8} \, du}_{\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_2^x 0 \, du}_0$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

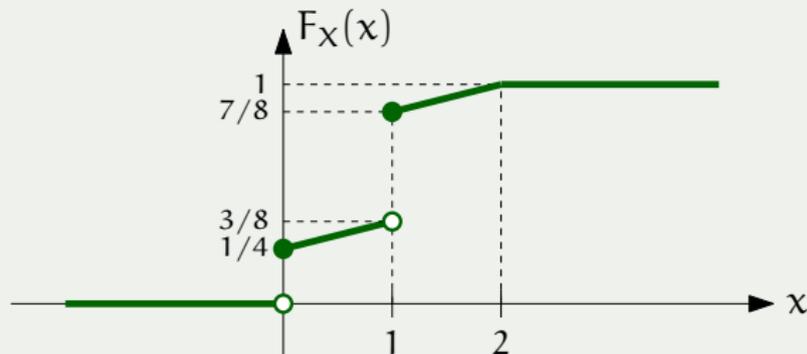
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x - 1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$



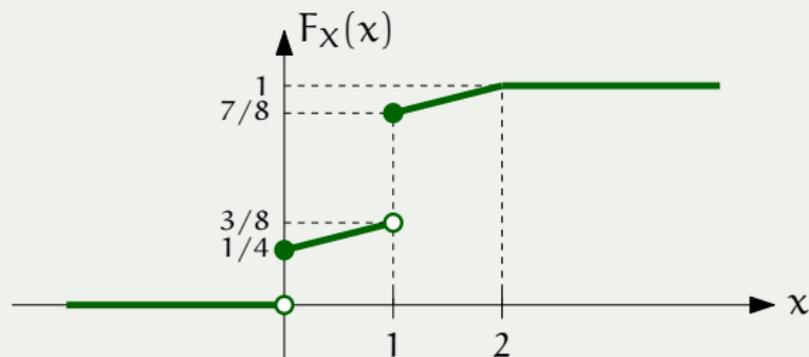
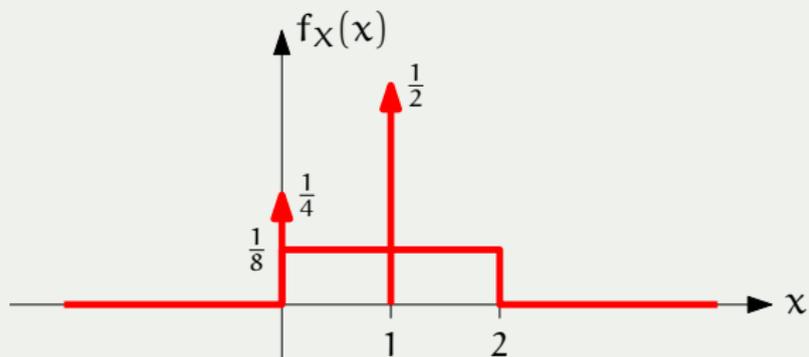
# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo

Sumário:

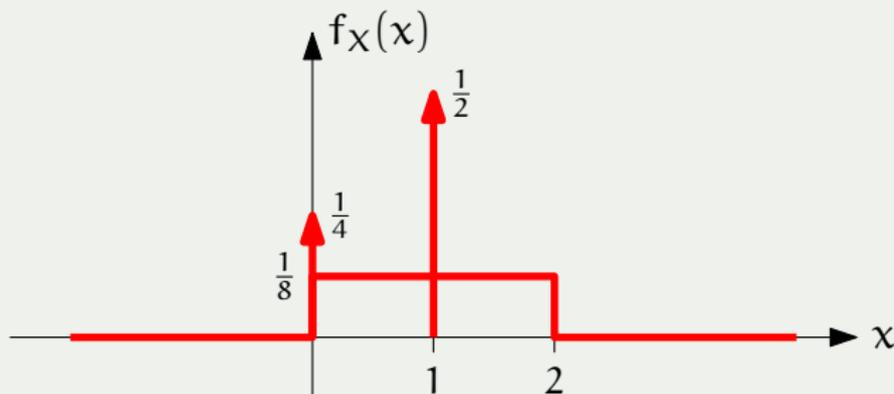
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{7}{8}, & x = 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8}(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$



# Variáveis aleatórias mistas: Exemplo



**Valor esperado: Solução 1: Pela definição do valor esperado:**



$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$



**Valor esperado: Solução 1: Pela definição do valor esperado:**

$$E[X] = \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx$$



**Valor esperado: Solução 1: Pela definição do valor esperado:**

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$



**Valor esperado: Solução 1: Pela definição do valor esperado:**

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= 0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx + \left[ \frac{x^2}{16} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} \int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1) dx + \left[ \frac{x^2}{16} \right]_{x=1}^{x=2} \end{aligned}$$



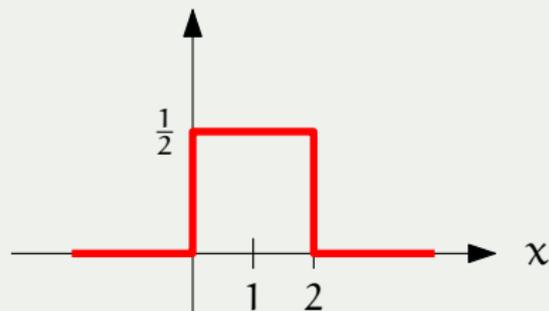
**Valor esperado: Solução 1: Pela definição do valor esperado:**

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{0^-}^{0^+} x \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_{0^+}^{1^-} x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} x \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_{1^+}^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= \int_{0^-}^{0^+} 0 \frac{1}{4} \delta(x) dx + \int_0^1 x \frac{1}{8} dx + \int_{1^-}^{1^+} 1 \frac{1}{2} \delta(x-1) dx + \int_1^2 x \frac{1}{8} dx \\ &= 0 \int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx + \left[ \frac{x^2}{16} \right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} \int_{1^-}^{1^+} \delta(x-1) dx + \left[ \frac{x^2}{16} \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= 0 \cdot 1 + \left[ \frac{1}{16} - \frac{0}{16} \right] + \frac{1}{2} \cdot 1 + \left[ \frac{4}{16} - \frac{1}{16} \right] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

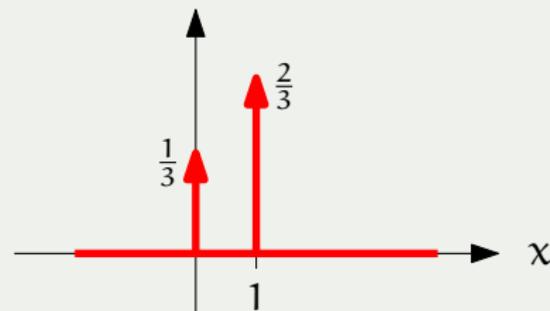


**Valor esperado: Solução 2:** Pelo **teorema da probabilidade total**:

$$f_X(x | U \leq 1)$$



$$f_X(x | U > 1)$$

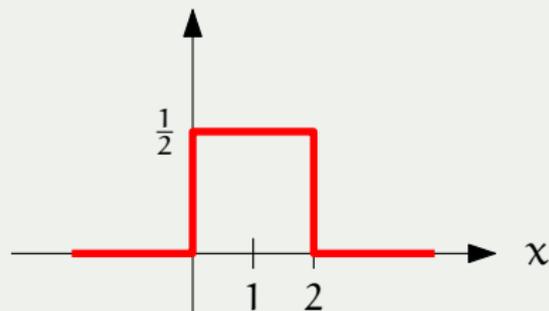


$$E[X] = E[X | U \leq 1] \Pr[U \leq 1] + E[X | U > 1] \Pr[U > 1]$$

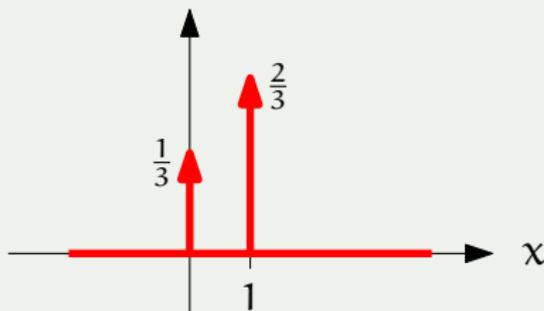


**Valor esperado: Solução 2:** Pelo teorema da probabilidade total:

$$f_X(x | U \leq 1)$$



$$f_X(x | U > 1)$$

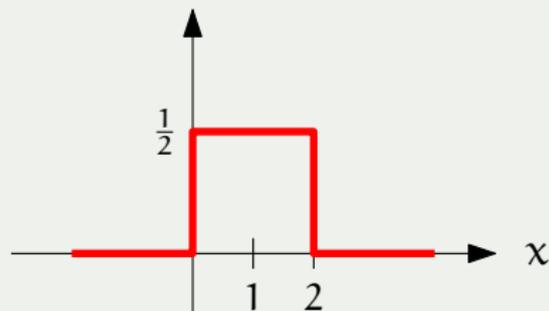


$$E[X] = \underbrace{E[X | U \leq 1]}_1 \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X | U > 1]}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}}$$

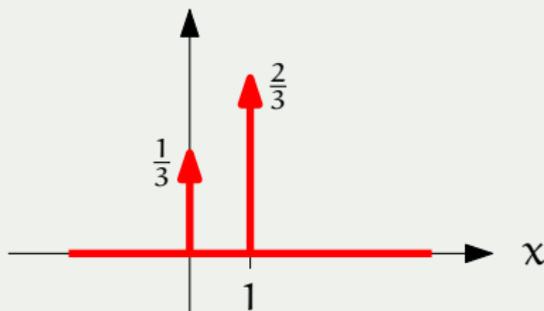


**Valor esperado: Solução 2:** Pelo teorema da probabilidade total:

$f_X(x | U \leq 1)$



$f_X(x | U > 1)$



$$E[X] = \underbrace{E[X | U \leq 1]}_1 \underbrace{\Pr[U \leq 1]}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{E[X | U > 1]}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\Pr[U > 1]}_{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$



# Referências



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.  
***PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.***  
Wiley, 3rd edition, 2014.

