Processos Estocásticos

Covariância e conceitos relacionados

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006

Engenharia de Telecomunicações

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Valor esperado de função de duas VAs

Valor esperado de função de duas VAs

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.

Teorema

$$E[g(X, Y)] = \sum_{x,y} g(x, y) p_{X,Y}(x, y) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \qquad \text{(caso geral)}$$

Valor esperado de função de duas VAs

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.

Teorema

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y) p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \qquad \text{(caso geral)}$$

Esse resultado será necessário no decorrer desta aula.

Covariância

Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **covariância** de X e Y é definida por

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **covariância** de X e Y é definida por

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

A covariância é uma medida de **dependência <u>linear</u>**.

Fórmula alternativa para a covariância

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Proposição

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y].$$

Fórmula alternativa para a covariância

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Proposição

$$\mathrm{cov}[X, Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}[X, Y] &= \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\
&= \mathrm{E}[XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y] \\
&= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mu_Y - \mu_X\,\mathrm{E}[Y] + \mathrm{E}[\mu_X\mu_Y] \\
&= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] - \cancel{\mu_X\mu_Y} + \cancel{\mu_X\mu_Y} \\
&= \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]. \quad \square
\end{aligned}$$

Propriedades

1. **Simetria**

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{cov}[Y, X].$$

1. **Simetria**

   $$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{cov}[Y, X].$$

2. **Covariância de uma VA com si mesma**

   $$\operatorname{cov}[X, X] = \operatorname{var}[X].$$

Propriedades

1. **Simetria**

   $$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{cov}[Y, X].$$

2. **Covariância de uma VA com si mesma**

   $$\operatorname{cov}[X, X] = \operatorname{var}[X].$$

3. **Faixa de valores** (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

   $$-\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]} \leq \operatorname{cov}[X, Y] \leq \sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}.$$

   Pode assumir valor negativo, positivo, ou zero.

Propriedades

1. **Simetria**

   $$\operatorname{cov}[X, Y] = \operatorname{cov}[Y, X].$$

2. **Covariância de uma VA com si mesma**

   $$\operatorname{cov}[X, X] = \operatorname{var}[X].$$

3. **Faixa de valores** (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

   $$-\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]} \leq \operatorname{cov}[X, Y] \leq \sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}.$$

   Pode assumir valor negativo, positivo, ou zero.

4. **Variância da soma**

   $$\operatorname{var}[X + Y] = \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] + 2\operatorname{cov}[X, Y].$$

Coeficiente de Pearson

Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

O **coeficiente de Pearson** de X e Y é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

definido apenas quando $\operatorname{var}[X] > 0$ e $\operatorname{var}[Y] > 0$.

Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

O **coeficiente de Pearson** de X e Y é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

definido apenas quando $\operatorname{var}[X] > 0$ e $\operatorname{var}[Y] > 0$.

O coeficiente de Pearson é a **covariância normalizada**.
Também é uma medida da dependência linear.

Propriedades

1. **Faixa de valores** *(segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.)*

   $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

   Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.

1. **Faixa de valores** *(segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.)*

   $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

   Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.

2. **Dependência completamente linear**

   $$\rho_{X,Y} = +1 \quad \Longleftrightarrow \quad Y = aX + b, \ \text{com } a > 0.$$
   $$\rho_{X,Y} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad Y = aX + b, \ \text{com } a < 0.$$

Propriedades

1. **Faixa de valores** *(segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz.)*

   $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

   Contraste com a covariância, que pode assumir qualquer valor real.

2. **Dependência completamente linear**

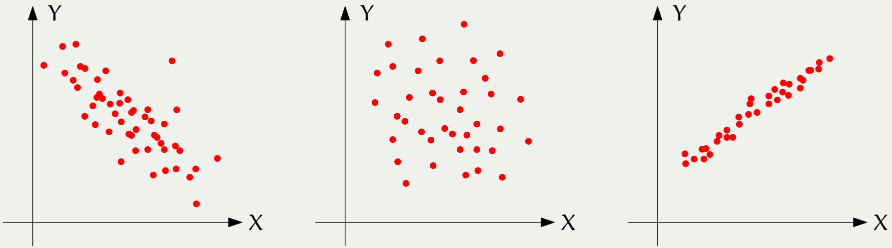
   $$\begin{aligned} \rho_{X,Y} = +1 \quad &\iff \quad Y = aX + b, \ \text{com } a > 0. \\ \rho_{X,Y} = -1 \quad &\iff \quad Y = aX + b, \ \text{com } a < 0. \end{aligned}$$

3. **Invariância a mudanças de escala e translações**

   Se $X' = a_1X + b_1$ e $Y' = a_2Y + b_2$, então $\rho_{X,Y} = \rho_{X',Y'}$.

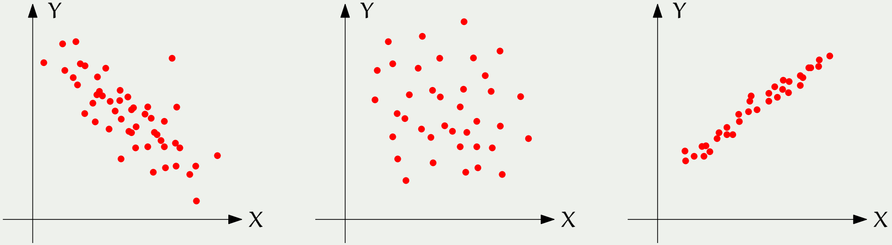
Módulo. O quanto X e Y satisfazem "$Y = aX + b$".

Sinal. $(+)$ X e Y crescem/decrescem juntos.
$(-)$ Quando um cresce o outro decresce.



Módulo. O quanto X e Y satisfazem "$Y = aX + b$".

Sinal. $(+)$ X e Y crescem/decrescem juntos.
$(-)$ Quando um cresce o outro decresce.

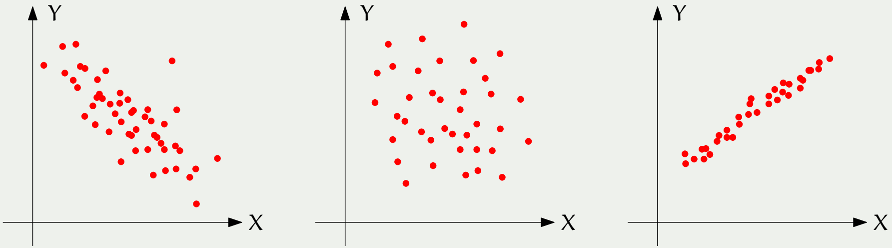


$$\rho_{X,Y} = -0{,}7$$

Ilustração

Módulo. O quanto X e Y satisfazem "$Y = aX + b$".

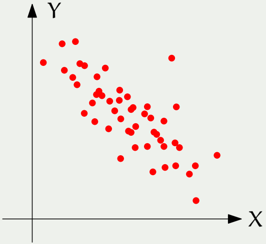
Sinal. $(+)$ X e Y crescem/decrescem juntos.
$(-)$ Quando um cresce o outro decresce.



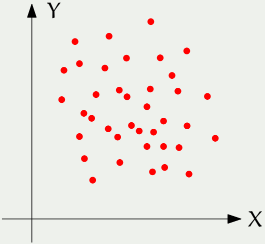
$\rho_{X,Y} = -0{,}7$ $\qquad$ $\rho_{X,Y} = 0$

Módulo. O quanto X e Y satisfazem "$Y = aX + b$".

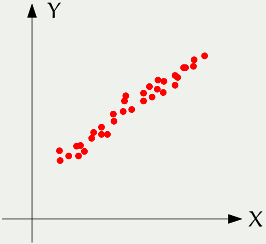
Sinal. $(+)$ X e Y crescem/decrescem juntos.
$(-)$ Quando um cresce o outro decresce.



$\rho_{X,Y} = -0{,}7$

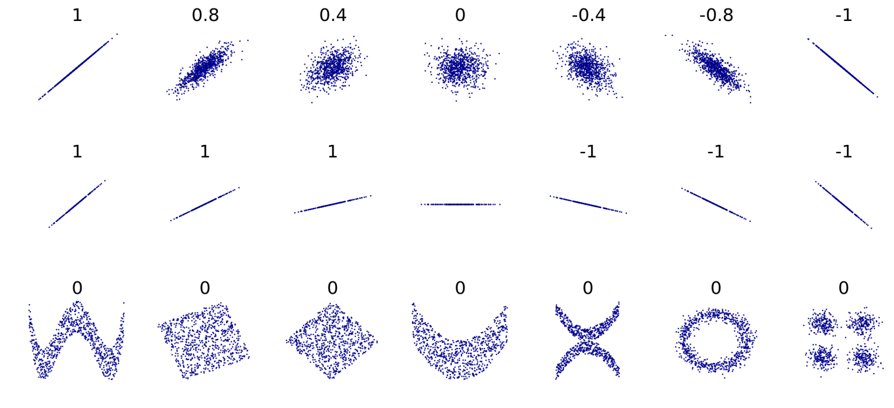


$\rho_{X,Y} = 0$



$\rho_{X,Y} = 0{,}9$

Ilustração



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Correlation_examples2.svg

Exemplo 1

Exemplo

Considere um dado cúbico honesto cujas seis faces estão pintadas conforme a seguir:

⚀ ⚀ ⚁ ⚁ ⚂ ⚂

Considere o experimento probabilístico que consiste em rolar tal dado e depois lançar uma moeda honesta o número de vezes mostrado no dado. Sejam:

- X = resultado do dado.
- Y = número de coroas obtidas.

Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

Exemplo 1

D	M_1	M_2	M_3	X	Y	Pr
⚀	☺			1	0	1/6
⚀	♛			1	1	1/6
⚁	☺	☺		2	0	1/12
⚁	☺	♛		2	1	1/12
⚁	♛	☺		2	1	1/12
⚁	♛	♛		2	2	1/12
⚂	☺	☺	☺	3	0	1/24
⚂	☺	☺	♛	3	1	1/24
⚂	☺	♛	☺	3	1	1/24
⚂	☺	♛	♛	3	2	1/24
⚂	♛	☺	☺	3	1	1/24
⚂	♛	☺	♛	3	2	1/24
⚂	♛	♛	☺	3	2	1/24
⚂	♛	♛	♛	3	3	1/24

Exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	$1/6$	$1/6$	0	0	$1/3$
$x=2$	$1/12$	$2/12$	$1/12$	0	$1/3$
$x=3$	$1/24$	$3/24$	$3/24$	$1/24$	$1/3$
$p_Y(y)$	$7/24$	$11/24$	$5/24$	$1/24$	1

Exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	1/6	1/6	0	0	1/3
$x=2$	1/12	2/12	1/12	0	1/3
$x=3$	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$p_Y(y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	1

$$
\begin{aligned}
E[X] &= (1)\tfrac{1}{3} + (2)\tfrac{1}{3} + (3)\tfrac{1}{3} = 2 \\
E[Y] &= (0)\tfrac{7}{24} + (1)\tfrac{11}{24} + (2)\tfrac{5}{24} + (3)\tfrac{1}{24} = 1 \\
E[XY] &= (1)(0)\tfrac{1}{6} + (1)(1)\tfrac{1}{6} + \cdots + (3)(3)\tfrac{1}{24} = 7/3
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	1/6	1/6	0	0	1/3
$x=2$	1/12	2/12	1/12	0	1/3
$x=3$	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$p_Y(y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	1

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= (1)\tfrac{1}{3} + (2)\tfrac{1}{3} + (3)\tfrac{1}{3} = 2 \\
\mathrm{E}[Y] &= (0)\tfrac{7}{24} + (1)\tfrac{11}{24} + (2)\tfrac{5}{24} + (3)\tfrac{1}{24} = 1 \\
\mathrm{E}[XY] &= (1)(0)\tfrac{1}{6} + (1)(1)\tfrac{1}{6} + \cdots + (3)(3)\tfrac{1}{24} = 7/3
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{cov}[X,Y] = \underbrace{\mathrm{E}[XY]}_{7/3} - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{2}\ \underbrace{\mathrm{E}[Y]}_{1} = 1/3$$

Exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	1/6	1/6	0	0	1/3
$x=2$	1/12	2/12	1/12	0	1/3
$x=3$	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$p_Y(y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	1

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X^2] &= (1)^2\tfrac{1}{3} + (2)^2\tfrac{1}{3} + (3)^2\tfrac{1}{3} = 14/3 \\ \mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = 14/3 - 2^2 = 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y^2] &= (0)^2\tfrac{7}{24} + (1)^2\tfrac{11}{24} + (2)^2\tfrac{5}{24} + (3)^2\tfrac{1}{24} = 5/3 \\ \mathrm{var}[Y] &= \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[Y]^2 = 5/3 - 1^2 = 2/3 \end{aligned}$$

Exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
$x=1$	1/6	1/6	0	0	1/3
$x=2$	1/12	2/12	1/12	0	1/3
$x=3$	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$p_Y(y)$	7/24	11/24	5/24	1/24	1

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}} = \frac{1/3}{\sqrt{(2/3)\cdot(2/3)}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2

Exemplo

Uma régua de comprimento unitário é quebrada em um ponto aleatório. O pedaço da esquerda é novamente quebrado. Seja X a variável aleatória que define, a partir da extremidade esquerda da régua, o ponto em que a régua é quebrada pela primeira vez e Y a variável aleatória que define o segundo ponto de quebra.

a. Determine a PDF conjunta de X e Y.
b. Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

Exemplo 2

a. Determine a PDF conjunta de X e Y.

Exemplo 2

a Determine a PDF conjunta de X e Y.

Temos:

$$\begin{aligned} X &\sim \mathrm{Unif}([0,1]) \\ Y \mid X = x &\sim \mathrm{Unif}([0,x]) \end{aligned}$$

Exemplo 2

- **a** Determine a PDF conjunta de X e Y.

  Temos:

$$\begin{aligned} X &\sim \mathrm{Unif}([0,1]) \\ Y \mid X = x &\sim \mathrm{Unif}([0,x]) \end{aligned}$$

  Portanto:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y \mid X = x)$$

a. Determine a PDF conjunta de X e Y.

Temos:

$$\begin{aligned} X &\sim \mathrm{Unif}([0,1]) \\ Y \mid X = x &\sim \mathrm{Unif}([0,x]) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x)\, f_Y(y \mid X = x) \\ &= 1[0 \leq x \leq 1] \cdot \frac{1}{x}[0 \leq y \leq x] \end{aligned}$$

a Determine a PDF conjunta de X e Y.

Temos:

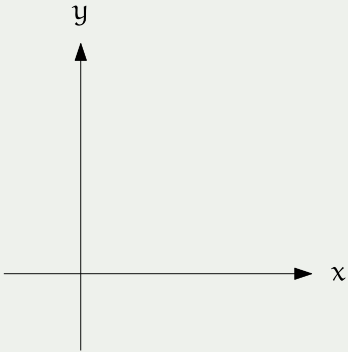
$$\begin{aligned} X &\sim \mathrm{Unif}([0,1]) \\ Y \mid X = x &\sim \mathrm{Unif}([0,x]) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x)\, f_Y(y \mid X = x) \\ &= 1[0 \le x \le 1] \cdot \frac{1}{x}[0 \le y \le x] \\ &= \frac{1}{x}[0 \le y \le x \le 1] \end{aligned}$$

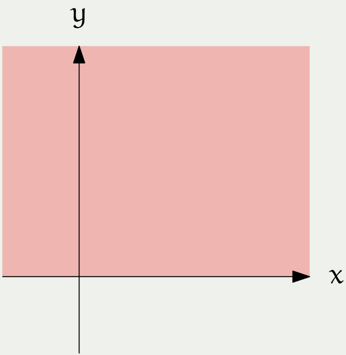
a Determine a PDF conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}\,[0 \le y \le x \le 1]$$



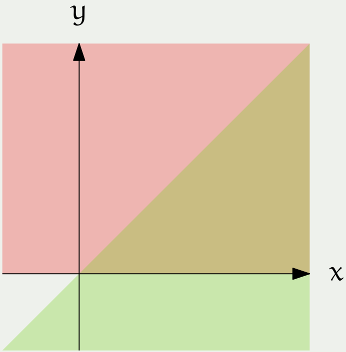
a Determine a PDF conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}\,[\underbrace{0 \le y} \le x \le 1]$$



a Determine a PDF conjunta de X e Y.

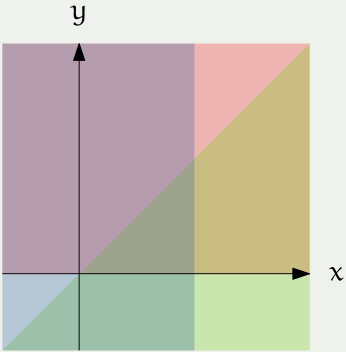
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}\,[0 \leq \underbrace{y \leq x}_{} \leq 1]$$



Exemplo 2

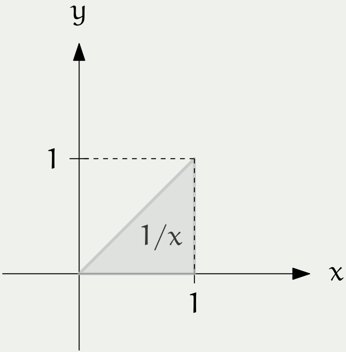
a. Determine a PDF conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x}[0 \le y \le \underbrace{x \le 1}]$$



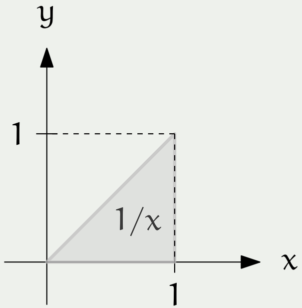
a Determine a PDF conjunta de X e Y.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x} [0 \leq y \leq x \leq 1]$$



b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

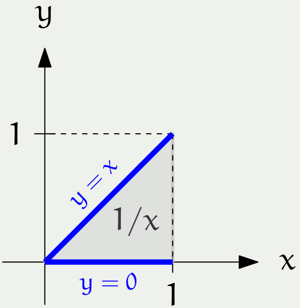
$$\text{cov}[X,Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}\ \underbrace{E[Y]}$$



$$E[X] = \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

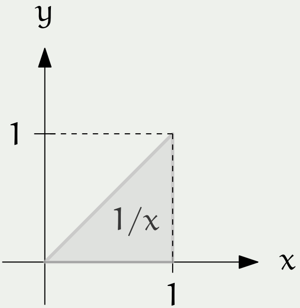
$$\operatorname{cov}[X,Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}\ \underbrace{E[Y]}$$



$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

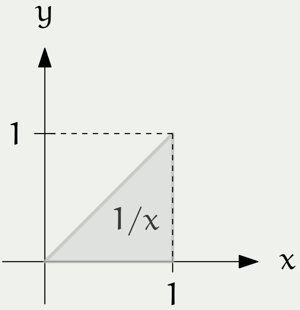
$$\mathrm{cov}[X, Y] = \underbrace{\mathrm{E}[XY]} - \underbrace{\mathrm{E}[X]}\ \underbrace{\mathrm{E}[Y]}$$



$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x\, f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1\, dy\, dx
\end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

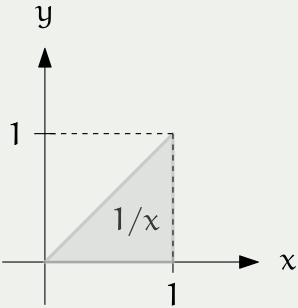
$$\operatorname{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}\ \underbrace{E[Y]}$$



$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x\, f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x\, dx \end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

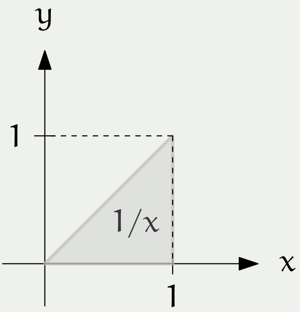
$$\operatorname{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}$$



$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} x\, f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} 1\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x\, dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]} - \underbrace{E[X]}_{1/2} \underbrace{E[Y]}_{1/4}$$

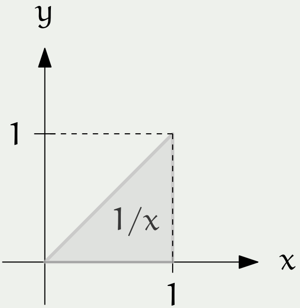


$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} y\, f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{y}{x}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 2

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

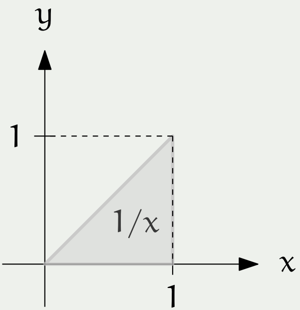
$$\operatorname{cov}[X,Y] = \underbrace{E[XY]}_{1/6} - \underbrace{E[X]}_{1/2}\,\underbrace{E[Y]}_{1/4}$$



$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} xy\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} y\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\operatorname{cov}[X, Y] = \underbrace{E[XY]}_{1/6} - \underbrace{E[X]}_{1/2}\,\underbrace{E[Y]}_{1/4} = \frac{1}{24}$$

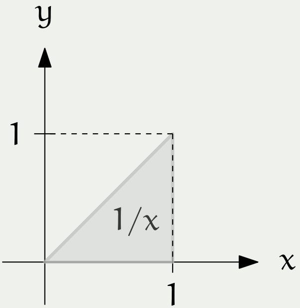


$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \int_{y=-\infty}^{y=\infty} xy\, f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} xy\, \frac{1}{x}\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} y\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exemplo 2

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

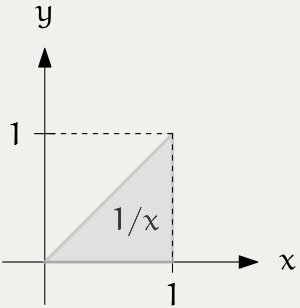
$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{var}[X]\operatorname{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12)\cdot(\qquad)}} =$$



$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} x^2 f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} x^2\,\frac{1}{x}\,dy\,dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} x\,dy\,dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

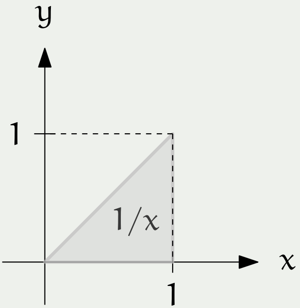
$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12)\cdot(7/144)}} =$$



$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} y^2 f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} y^2\,\frac{1}{x}\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} \frac{y^2}{x}\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

b Determine a covariância e o coeficiente de Pearson entre X e Y.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{var}[X]\,\mathrm{var}[Y]}} = \frac{1/24}{\sqrt{(1/12)\cdot(7/144)}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



$$\begin{aligned}
E[Y^2] &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty}\int_{y=-\infty}^{y=\infty} y^2\, f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} y^2\,\frac{1}{x}\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} \frac{y^2}{x}\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Descorrelação

Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando. . .

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X \, f_Y$

Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff$ $f_{X,Y} = f_X f_Y$

Definição

X e Y são **descorrelacionadas** $\iff$ $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$

Descorrelação: Definição

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

$$X \text{ e } Y \text{ são } \textbf{independentes} \iff f_{X,Y} = f_X \, f_Y$$

Definição

$$\begin{aligned} X \text{ e } Y \text{ são } \textbf{descorrelacionadas} &\iff \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \\ &\iff \mathrm{cov}[X, Y] = 0 \end{aligned}$$

Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Relembrando...

X e Y são **independentes** $\iff f_{X,Y} = f_X \, f_Y$

Definição

$$
\begin{aligned}
X \text{ e } Y \text{ são } \textbf{descorrelacionadas} &\iff \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \\
&\iff \mathrm{cov}[X, Y] = 0 \\
&\iff \mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]
\end{aligned}
$$

Proposição

$$X \text{ e } Y \text{ independentes} \implies X \text{ e } Y \text{ descorrelacionadas}$$

Proposição

X e Y independentes $\Longrightarrow$ X e Y descorrelacionadas

Demonstração: Se X e Y são independentes, então

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = E[X]\, E[Y]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Independência × Descorrelação

Proposição

$$X \text{ e } Y \text{ independentes} \implies X \text{ e } Y \text{ descorrelacionadas}$$

...mas a recíproca é falsa!

Descorrelação não implica independência.

Contra-exemplo 1

Exemplo

Sejam X e Y duas VAs discretas conjuntamente distribuídas como abaixo.

(x, y)	$p_{X,Y}(x, y)$
$(0, +1)$	$1/4$
$(+1, 0)$	$1/4$
$(0, -1)$	$1/4$
$(-1, 0)$	$1/4$

Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=-1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$x=0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$x=1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_Y(y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=-1$	0	1/4	0	1/4
$x=0$	1/4	0	1/4	1/2
$x=1$	0	1/4	0	1/4
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\, p_{X,Y}(x,y) = (0 \cdot 1)\tfrac{1}{4} + (1 \cdot 0)\tfrac{1}{4} + (-1 \cdot 0)\tfrac{1}{4} + (0 \cdot -1)\tfrac{1}{4} = 0$$

$$E[X] = \sum_{x} x\, p_X(x) = (-1)\tfrac{1}{4} + (0)\tfrac{1}{2} + (1)\tfrac{1}{4} = 0$$

$$E[Y] = \sum_{y} y\, p_Y(y) = (-1)\tfrac{1}{4} + (0)\tfrac{1}{2} + (1)\tfrac{1}{4} = 0$$

Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=-1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$x=0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$x=1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_Y(y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$\underbrace{\mathrm{E}[XY]}_{0} = \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{0}\,\underbrace{\mathrm{E}[Y]}_{0}$ $\quad\therefore\quad$ X e Y são descorrelacionadas

Contra-exemplo 1

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$p_X(x)$
$x=-1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$x=0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$x=1$	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_Y(y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$\underbrace{p_{X,Y}(0,0)}_{0} \neq \underbrace{p_X(0)}_{1/2}\underbrace{p_Y(0)}_{1/2} \quad \therefore \quad \text{X e Y são dependentes}$$

Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

Exemplo

Seja $U \sim \text{Unif}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1,1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

$$\mathrm{E}[U^n] = \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f_U(u) \, \mathrm{d}u$$

Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1,1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f_U(u) \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-1}^{1} u^n \, \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f_U(u) \, du \\ &= \int_{-1}^{1} u^n \, \frac{1}{2} \, du \; = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} \end{aligned}$$

Contra-exemplo 2

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1,1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f_U(u) \, du \\
&= \int_{-1}^{1} u^n \, \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{2(n+1)} \left[1^{n+1} - (-1)^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $U \sim \mathrm{Unif}([-1, 1])$. Sejam $X = U^2$ e $Y = U^3$. Mostre que X e Y são descorrelacionadas mas dependentes.

A solução é facilitada se calcularmos primeiramente $\mathrm{E}[U^n]$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[U^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} u^n \, f_U(u) \, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-1}^{1} u^n \, \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{2(n+1)} \left[1^{n+1} - (-1)^{n+1} \right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Contra-exemplo 2

- X e Y são descorrelacionadas:

Contra-exemplo 2

- X e Y são descorrelacionadas:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[U^2] = \tfrac{1}{3} \\
E[Y] &= E[U^3] = 0 \\
E[XY] &= E[U^2U^3] = E[U^5] = 0
\end{aligned}
$$

Contra-exemplo 2

- X e Y são descorrelacionadas:

$$E[X] = E[U^2] = \frac{1}{3}$$
$$E[Y] = E[U^3] = 0$$
$$E[XY] = E[U^2U^3] = E[U^5] = 0$$

$$\underbrace{E[XY]}_{0} = \underbrace{E[X]}_{1/3}\,\underbrace{E[Y]}_{0} \quad \therefore \quad X \text{ e } Y \text{ são descorrelacionadas}$$

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

  Prova por contradição:

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\dots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x, y)\ldots$ E agora?

Prova por contradição:

1. Hipótese: X e Y são independentes.
2. Então X^2 e Y^2 são independentes.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x, y)\dots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.
  2. Então X^2 e Y^2 são independentes.
  3. Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.
  2. Então X^2 e Y^2 são independentes.
  3. Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
  4. Então $\mathrm{E}[X^2Y^2] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\dots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.
  2. Então X^2 e Y^2 são independentes.
  3. Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
  4. Então $\mathrm{E}[X^2Y^2] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$.
  5. Então $\mathrm{E}[U^{10}] = \mathrm{E}[U^4]\,\mathrm{E}[U^6]$.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.
  2. Então X^2 e Y^2 são independentes.
  3. Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
  4. Então $\mathrm{E}[X^2Y^2] = \mathrm{E}[X^2]\,\mathrm{E}[Y^2]$.
  5. Então $\mathrm{E}[U^{10}] = \mathrm{E}[U^4]\,\mathrm{E}[U^6]$.
  6. Então $\frac{1}{11} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$. Absurdo!

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

  Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

  Prova por contradição:

  1. Hipótese: X e Y são independentes.
  2. Então X^2 e Y^2 são independentes.
  3. Então X^2 e Y^2 são descorrelacionadas.
  4. Então $E[X^2Y^2] = E[X^2]\,E[Y^2]$.
  5. Então $E[U^{10}] = E[U^4]\,E[U^6]$.
  6. Então $\frac{1}{11} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$. Absurdo!

  Portanto, a hipótese (X e Y são independentes) é falsa.

Contra-exemplo 2

- X e Y são dependentes:

Não temos $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X,Y}(x,y)\ldots$ E agora?

Alternativamente… Para $U \sim \mathrm{Unif}([-1,1])$, $X = U^2$, $Y = U^3$:

$$
\begin{aligned}
f_X(x \mid Y = y) &= \delta\left(x - y^{2/3}\right) \\
f_Y(y \mid X = x) &= \tfrac{1}{2}\delta\left(y - x^{3/2}\right) + \tfrac{1}{2}\delta\left(y + x^{3/2}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto, X e Y são dependentes.

Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
***Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*.**
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes*.**
Wiley, 3rd edition, 2014.