Processos Estocásticos

Vetores aleatórios gaussianos

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Revisão: Variável aleatória gaussiana

Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde:

- $\mu = \mu_X = \mathrm{E}[X]$ é a média
- $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$ é a variância

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Definição (revisão)

Uma variável aleatória X é dita ser **gaussiana** se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

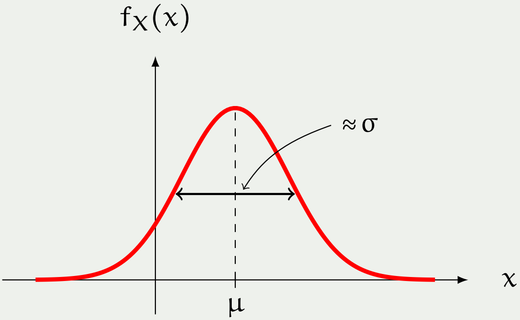
onde:

- $\mu = \mu_X = \mathrm{E}[X]$ é a média
- $\sigma^2 = \sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$ é a variância

Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

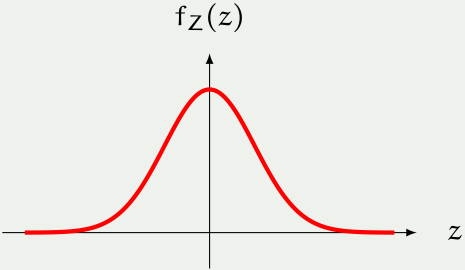
Ilustração



Demonstração interativa: Site docente

Definição

A variável aleatória $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ é chamada de **gaussiana padrão**.

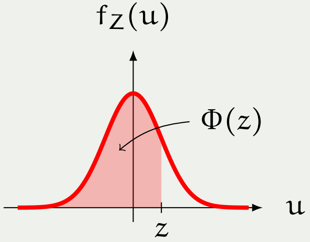


$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Função Φ

A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

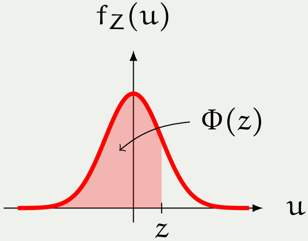
$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du =$$



Função Φ

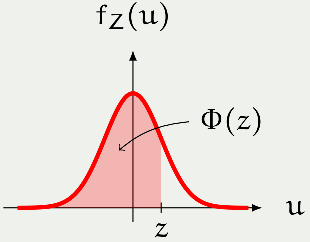
A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

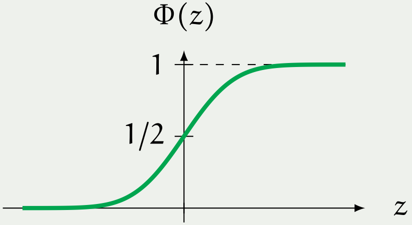
$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du \triangleq \Phi(z)$$



A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

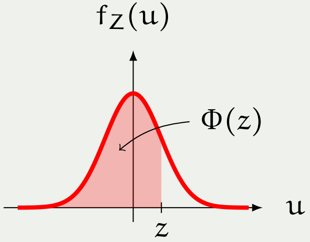
$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du \triangleq \Phi(z)$$

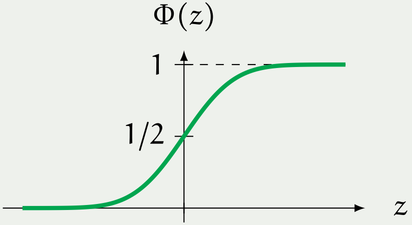




A CDF da VA gaussiana padrão é dada por

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du \triangleq \Phi(z)$$

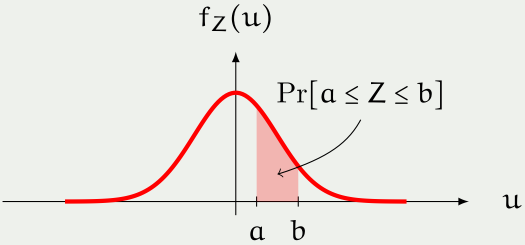




Obs: Define-se também a função $Q(z) = 1 - \Phi(z)$, bastante utilizada em sistemas de comunicação digital.

Para a gaussiana padrão, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$:

$$\Pr[a \leq Z \leq b] = \Phi(b) - \Phi(a)$$



Probabilidade de um intervalo

No caso geral, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, aplica-se o mapeamento $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Probabilidade de um intervalo

No caso geral, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, aplica-se o mapeamento $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$:

$$\Pr[a \leq X \leq b] = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Demonstração: Exercício.

Exemplo

Exemplo

Seja $X \sim \mathrm{N}(5, 16)$.

- a Determine a PDF de X.
- b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.

Exemplo

$$X \sim N(5, 16)$$

a. Determine a PDF de X.

Exemplo

$$X \sim N(5, 16)$$

a Determine a PDF de X.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4^2}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2 \cdot 4^2}} \end{aligned}$$

Exemplo

$$X \sim N(5, 16)$$

b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.

Exemplo

$$X \sim N(5, 16)$$

b Determine $\Pr[7 \leq X \leq 12]$.

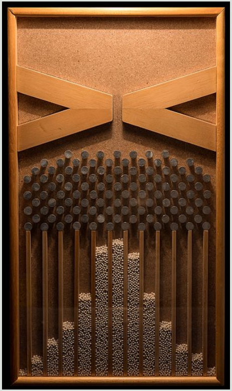
$$\begin{aligned}
\Pr[7 \leq X \leq 12] &= \Phi\left(\frac{12-5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{7-5}{4}\right) \\
&= \Phi(7/4) - \Phi(1/2) \\
&= 0{,}9599 - 0{,}6915 \\
&= 0{,}2685
\end{aligned}$$

Teorema

Sob certas hipóteses, o somatório de n variáveis aleatórias independentes converge para uma gaussiana, para n suficientemente grande.

Statistics of rolling dice: Academo

Galton board: YouTube



Galton board

Definição: Vetor aleatório gaussiano

Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{\text{V}}\text{A gaussiano} \iff$$
$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \;\; \cdots \;\; X_n]^T \text{ é um } \vec{V}\text{A gaussiano } \iff$$
$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \;\; \cdots \;\; X_n]^T$ é um **$\vec{V}$A gaussiano**.

Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{V}\text{A gaussiano} \iff$$
$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T$ é um **$\vec{V}$A gaussiano**.
- $X_1, \ldots, X_n$ são **VAs *conjuntamente* gaussianas**.

Definição

Um vetor aleatório é dito ser **gaussiano** se toda combinação linear de seus elementos for uma variável aleatória gaussiana. Ou seja:

$$\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T \text{ é um } \vec{V}\text{A gaussiano } \iff$$
$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \text{ é uma VA gaussiana, } \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

As seguintes nomenclaturas são todas equivalentes:

- $\vec{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T$ é um **$\vec{V}$A gaussiano**.
- $X_1, \ldots, X_n$ são **VAs *conjuntamente* gaussianas**.
- $X_1, \ldots, X_n$ são distribuídas de acordo com a **distribuição gaussiana multidimensional**.

Individualmente não implica conjuntamente

Atenção!

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ conjuntamente gaussianas } \Longrightarrow$$
$$X_1 \text{ gaussiana } \wedge X_2 \text{ gaussiana } \wedge \cdots \wedge X_n \text{ gaussiana}$$

... mas a recíproca é falsa!

Contraexemplo

Exemplo

Sejam $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ e $B \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ independentes. Seja

$$Y = \begin{cases} +X, & B = 0, \\ -X, & B = 1. \end{cases}$$

a. Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.
b. Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Exemplo

Sejam $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ e $B \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$ independentes. Seja

$$Y = \begin{cases} +X, & B = 0, \\ -X, & B = 1. \end{cases}$$

- a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.
- b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Intuição:

X	0.44	-0.83	-0.36	-0.97	-1.17	0.35	-0.22	1.05	-1.07	-0.72	-0.76	-0.62	-0.86	-0.47	0.87	-0.69	0.16	-0.67
B	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Y	0.44	-0.83	0.36	0.97	-1.17	-0.35	0.22	1.05	1.07	-0.72	0.76	-0.62	-0.86	-0.47	-0.87	-0.69	0.16	-0.67

Contraexemplo

a) Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois
- Y é gaussiana, pois

Contraexemplo

a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

Contraexemplo

a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{}$$

Contraexemplo

a Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

Contraexemplo

a. Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

Contraexemplo

a. Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

Contraexemplo

a. Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Contraexemplo

a. Mostre que X e Y são ambas VAs gaussianas.

- X é gaussiana, pois está dito no enunciado.
- Y é gaussiana, pois

$$f_Y(y) = \underbrace{f_Y(y \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_Y(y \mid B = 1)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Obs: X e Y são identicamente distribuídas. São independentes?

Contraexemplo

- b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Contraexemplo

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Contraexemplo

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

X	0.44	-0.83	-0.36	-0.97	-1.17	0.35	-0.22	1.05	-1.07	-0.72	-0.76	-0.62	-0.86	-0.47	0.87	-0.69	0.16	-0.67
B	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Y	0.44	-0.83	0.36	0.97	-1.17	-0.35	0.22	1.05	1.07	-0.72	0.76	-0.62	-0.86	-0.47	-0.87	-0.69	0.16	-0.67
W	0.88	-1.66	0	0	-2.34	0	0	2.10	0	-1.44	0	-1.24	-1.72	-0.94	0	-1.38	0.32	1.34

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w \mid B = 0)}\ \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_W(w \mid B = 1)}\ \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

Contraexemplo

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 4}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_W(w \mid B = 1)} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

Por exemplo, $W = X + Y$:

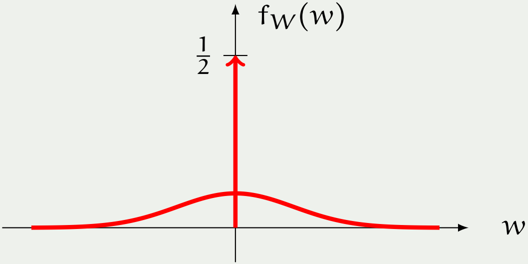
$$W = \begin{cases} 2X, & B = 0, \\ 0, & B = 1. \end{cases}$$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w \mid B = 0)}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} e^{-\frac{w^2}{2 \cdot 4}}} \underbrace{\Pr[B = 0]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{f_W(w \mid B = 1)}_{\delta(w)} \underbrace{\Pr[B = 1]}_{\frac{1}{2}}$$

b Mostre que X e Y *não são* conjuntamente gaussianas.

Basta encontrar uma combinação linear de X e Y que não seja uma VA gaussiana.

$$f_W(w) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}}e^{-\frac{w^2}{2\cdot 4}} + \frac{1}{2}\delta(w)$$



Propriedades

1. Um $\vec{\text{V}}$A gaussiano $\vec{X}$ é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

   Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

Propriedades

1. Um $\vec{\mathrm{V}}$A gaussiano $\vec{X}$ é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

   Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

2. **Transformação linear afim.** *(Segue da própria definição.)*

$$\vec{X} \sim \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$

Propriedades

1. Um $\vec{\mathrm{V}}$A gaussiano $\vec{X}$ é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

   Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

2. **Transformação linear afim.** *(Segue da própria definição.)*

$$\vec{X} \sim \vec{N} \implies A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$

3. **Condicionamento.** *(Não será demonstrado.)*

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{X}_a \\ \vec{X}_b \end{bmatrix} \sim \vec{N} \implies \vec{X}_a \mid \vec{X}_b \sim \vec{N}$$

Propriedades

1. Um $\vec{\mathrm{V}}$A gaussiano $\vec{X}$ é completamente especificado por seu vetor média $\vec{\mu}_{\vec{X}} = \vec{\mu}$ e sua matriz covariância $C_{\vec{X}} = C$.

   Notação: $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$.

2. **Transformação linear afim.** *(Segue da própria definição.)*

$$\vec{X} \sim \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad A\vec{X} + \vec{b} \sim \vec{N}$$

3. **Condicionamento.** *(Não será demonstrado.)*

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{X}_a \\ \vec{X}_b \end{bmatrix} \sim \vec{N} \quad \Longrightarrow \quad \vec{X}_a \mid \vec{X}_b \sim \vec{N}$$

4. **Independência** $\Longleftrightarrow$ **descorrelação.** *(Demonstração mais adiante.)*

Distribuição multidimensional

Teorema

Seja $\vec{X} \sim \vec{N}(\vec{\mu}, C)$, com $\det C \neq 0$. A PDF de $\vec{X}$ é dada por

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

Observação. Para o caso $n = 1$, tem-se:

$$\vec{X} = [X] \qquad \vec{\mu} = [\mu] \qquad C = [\sigma^2] \qquad \det C = \sigma^2 \qquad C^{-1} = [1/\sigma^2]$$

Portanto, recai-se na fórmula já conhecida:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^1 (\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}[x - \mu]\left[\frac{1}{\sigma^2}\right][x - \mu]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Relembrando...

Para VAs $X_1, \dots X_n$ *quaisquer*:

$$X_1, \dots X_n \text{ independentes} \quad \Longrightarrow \quad X_1, \dots X_n \text{ descorrelacionadas}$$

Demonstração: Independência $\iff$ Descorrelação

Proposição

Para VAs $X_1, \ldots X_n$ *conjuntamente gaussianas*:

$$X_1, \ldots X_n \text{ independentes} \iff X_1, \ldots X_n \text{ descorrelacionadas}$$

Proposição

Para VAs $X_1, \ldots X_n$ *conjuntamente gaussianas*:

$$X_1, \ldots X_n \text{ independentes} \quad \Longleftrightarrow \quad X_1, \ldots X_n \text{ descorrelacionadas}$$

Demonstração: (Para $n = 2$ e médias nulas, por simplicidade.)

Sejam X e Y duas VAs conjuntamente gaussianas de média zero.

Se X e Y são descorrelacionadas, então $\operatorname{cov}[X, Y] = 0$, de modo que

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \vec{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \right).$$

Temos:

$$\det\begin{bmatrix}\sigma_X^2 & 0\\ 0 & \sigma_Y^2\end{bmatrix} = \sigma_X^2\sigma_Y^2 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}\sigma_X^2 & 0\\ 0 & \sigma_Y^2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1/\sigma_X^2 & 0\\ 0 & 1/\sigma_Y^2\end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(\sigma_X^2\sigma_Y^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sigma_X^2 & 0\\ 0 & 1/\sigma_Y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)(2\pi\sigma_Y^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{\sigma_X^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right]\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right)\\
&= f_X(x)\, f_Y(y). \quad \square
\end{aligned}$$

Exemplo

Seja $\vec{X} = [X \ \ Y \ \ Z]^T$ um $\vec{V}A$ gaussiano de média nula e matriz covariância

$$C_{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

a. Determine a PDF de $\vec{X}$.
b. Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.
c. Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.
d. Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Exemplo

a. Determine a PDF de $\vec{X}$.

Exemplo

a. Determine a PDF de $\vec{X}$.

$$\vec{X} \sim \vec{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right).$$

Fórmula da gaussiana multidimensional:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

Temos:

$$\det C = 36 \qquad \text{e} \qquad C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

a Determine a PDF de $\vec{X}$.

Fórmula da gaussiana multidimensional:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T C^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})\right).$$

Portanto:

$$f_{\vec{X}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (36)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 (36)}} e^{-\frac{1}{12}[5x^2 + 3y^2 + z^2 - 6xy]}.$$

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Exemplo

b. Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

W é gaussiana. [Por quê?]

Portanto, basta determinar média e variância.

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Podemos escrever:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W \end{bmatrix}}_{\vec{W}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}}_{\vec{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{\vec{W}} &= A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} \\ C_{\vec{W}} &= AC_{\vec{X}}A^{T} \end{aligned}$$

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}$$

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \underset{\mu_W}{\underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}}$$

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\downarrow \\ \mu_W}}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}$$

Matriz de covariância de $\vec{W} = [W]$:

$$C_{\vec{W}} = AC_{\vec{X}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \underset{\downarrow}{\begin{bmatrix} 41 \end{bmatrix}}$$

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Vetor média de $\vec{W} = [W]$:

$$\vec{\mu}_{\vec{W}} = A\vec{\mu}_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}}_{\mu_W}$$

Matriz de covariância de $\vec{W} = [W]$:

$$C_{\vec{W}} = AC_{\vec{X}}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 41 \end{bmatrix}}_{\sigma_W^2}$$

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Conclusão: $W \sim \mathrm{N}(5, 41)$.

Exemplo

b Seja $W = X + 2Y - Z + 5$. Determine a PDF de W.

Conclusão: $W \sim \mathrm{N}(5, 41)$.

Portanto:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\,41}} e^{-\frac{(w-5)^2}{2\cdot 41}}$$

Exemplo

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Numerador:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \vec{\mathrm{N}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{5x^2 - 6x + 3}{6} \right) \end{aligned}$$

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Denominador:

$$Y \sim N(0, 5)$$

$$f_Y(1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)$$

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Temos:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)}$$

Portanto:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^2(6)}} \exp\left(-\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5x^2 - 6x + 3}{6}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)(5)}} \exp\left(-\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right)$$

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
f_X(x \mid Y = 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$f_X(x \mid Y = 1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right)$$

Conclusão: $X \mid Y = 1 \sim \mathrm{N}\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c Determine a PDF condicional de X dado que $Y = 1$.

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
f_X(x \mid Y = 1) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{25x^2 - 30x + 9}{30}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(6/5)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - 3/5)^2}{6/5}\right)
\end{aligned}
$$

Conclusão: $X \mid Y = 1 \sim \mathrm{N}\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

Lembrando: $X \sim \mathrm{N}(0, 3)$

Exemplo

d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Exemplo

d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\mathrm{cov}[X, Z] = 0 \quad \overset{\text{(conj. gauss.)}}{\Longrightarrow} \quad X, Z \ \text{ independentes}$$

Exemplo

d Determine $\Pr[0 \le X \le 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\operatorname{cov}[X, Z] = 0 \quad \overset{\text{(conj. gauss.)}}{\Longrightarrow} \quad X, Z \ \text{ independentes}$$

Portanto:

$$\Pr[0 \le X \le 1 \mid Z = 3] \ = \ \Pr[0 \le X \le 1]$$

Exemplo

d Determine $\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3]$.

Temos:

$$\mathrm{cov}[X, Z] = 0 \quad \overset{\text{(conj. gauss.)}}{\Longrightarrow} \quad X, Z \ \text{ independentes}$$

Portanto:

$$\Pr[0 \leq X \leq 1 \mid Z = 3] \ = \ \Pr[0 \leq X \leq 1]$$

Lembrando que $X \sim \mathrm{N}(0, 3)$, temos:

$$\Pr[0 \leq X \leq 1] \ = \ \Phi\left(\frac{1-0}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{3}}\right) \ = \ 0{,}2181$$

Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
***Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*.**
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes*.**
Wiley, 3rd edition, 2014.