Processos Estocásticos

Processos estocásticos

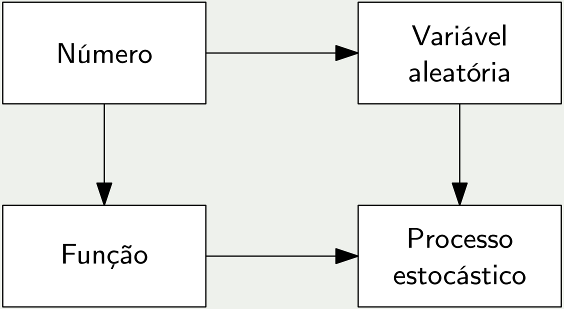
Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
Engenharia de Telecomunicações

Instituto Federal
Santa Catarina
Câmpus
São José

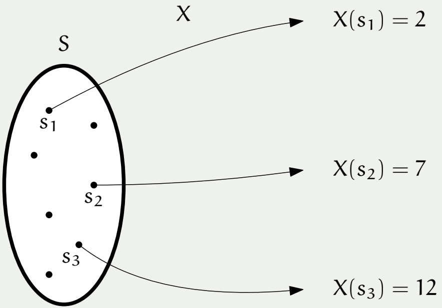
Introdução


Número
Variável aleatória
Função
Processo estocástico

Seja S o espaço amostral de um experimento probabilístico.

Relembrando...

Uma **variável aleatória (VA)** real é um mapeamento X do espaço amostral para um número real.

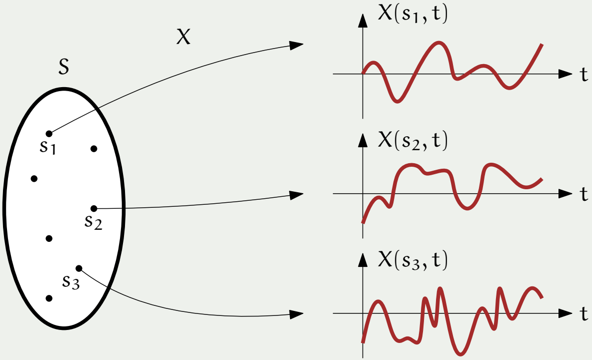


Definição

Seja S o espaço amostral de um experimento probabilístico.

Definição

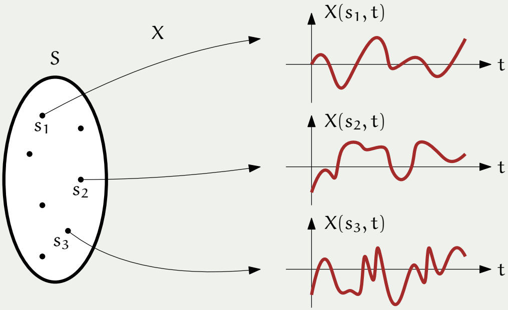
Um **processo estocástico (PE)** real é um mapeamento X do espaço amostral para uma *função* real.



Notação

A notação $X(s, t)$ pode representar:

- um **número**, para s e t específicos
- uma **função**, para s específico e t arbitrário
- uma **variável aleatória**, para t específico e s arbitrário
- um **processo estocástico**, para t e s arbitrários



Notação

A notação $X(s,t)$ pode representar:

- um **número**, para s e t específicos
- uma **função**, para s específico e t arbitrário
- uma **variável aleatória**, para t específico e s arbitrário
- um **processo estocástico**, para t e s arbitrários

Convenção. Omitir a dependência em s e escrever apenas $X(t)$ no lugar de $X(s,t)$.

Notação

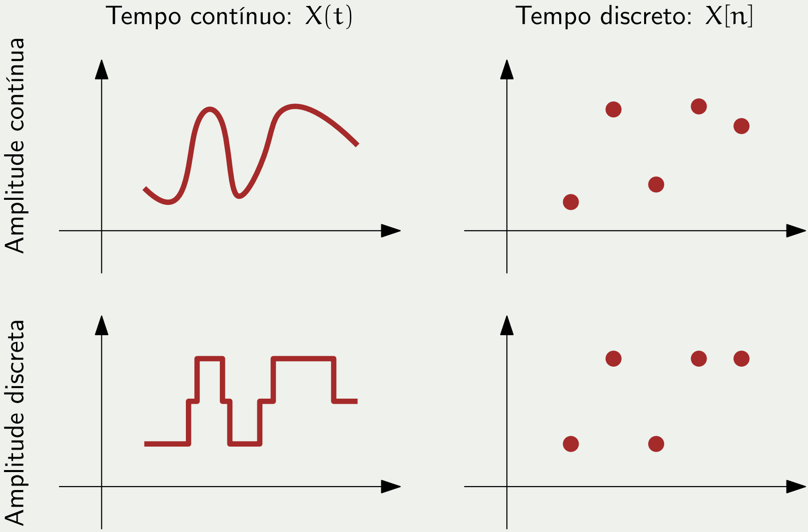
A notação $X(s,t)$ pode representar:

- um **número**, para s e t específicos
- uma **função**, para s específico e t arbitrário
- uma **variável aleatória**, para t específico e s arbitrário
- um **processo estocástico**, para t e s arbitrários

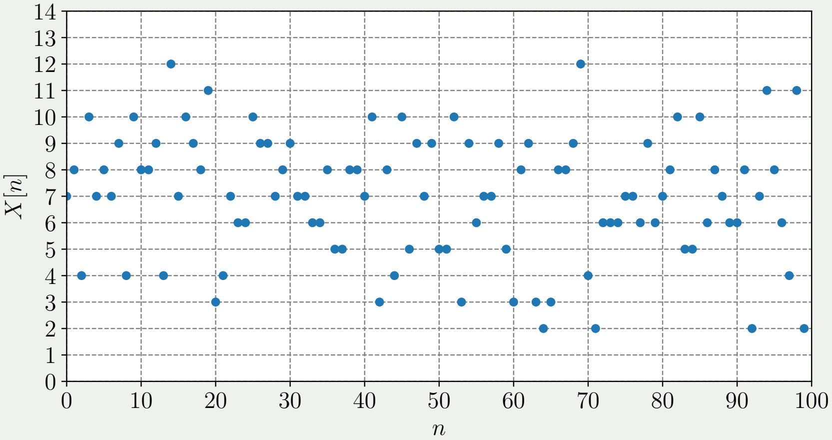
Convenção. Omitir a dependência em s e escrever apenas $X(t)$ no lugar de $X(s,t)$.

Nomenclatura. Os possíveis valores assumidos por um PE são chamados de *função-amostra*. Também: *sinal-amostra* ou *sequência-amostra* (dependendo do caso).

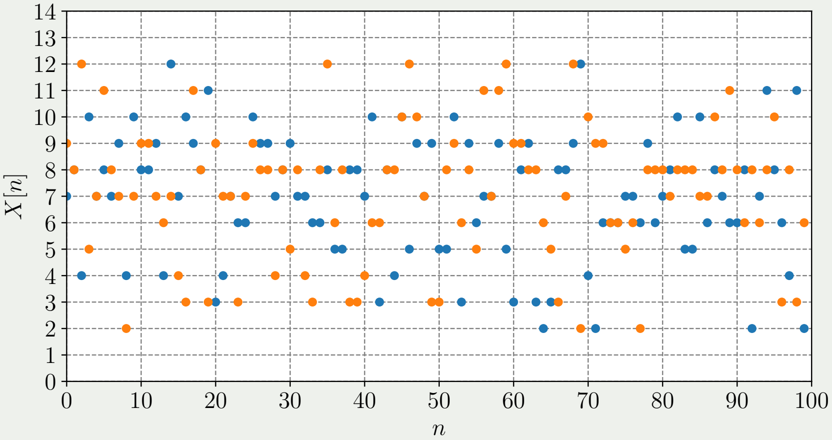
Revisão: Classificação de funções



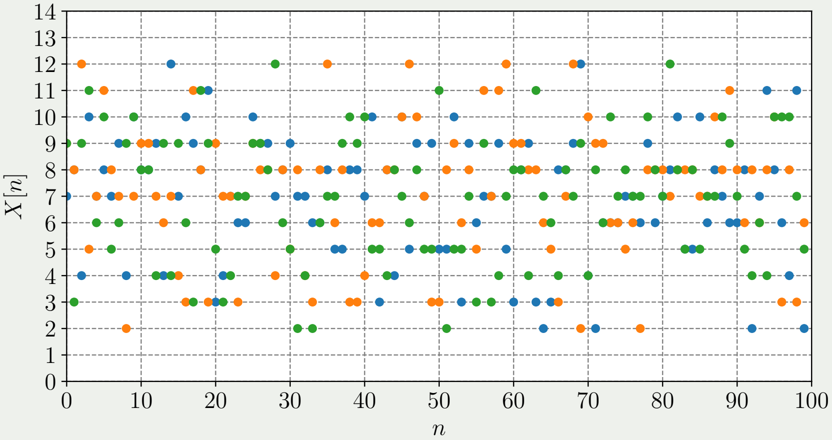
Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



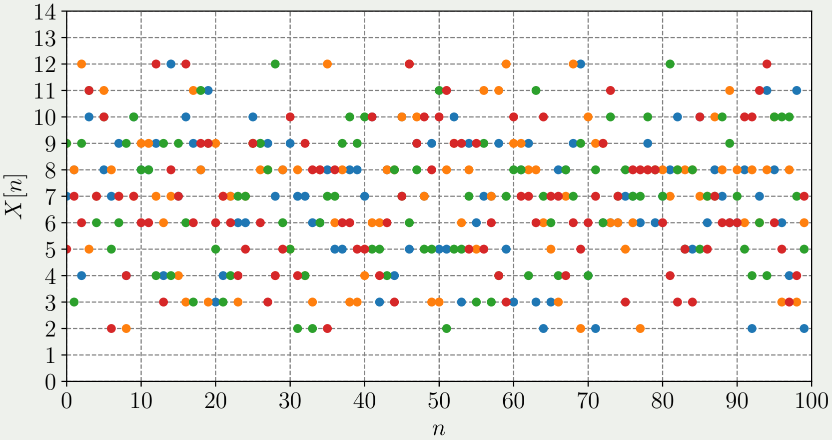
Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



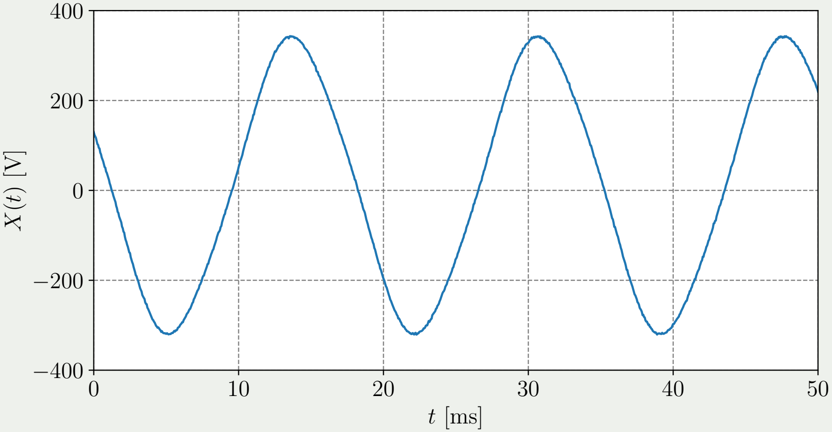
Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



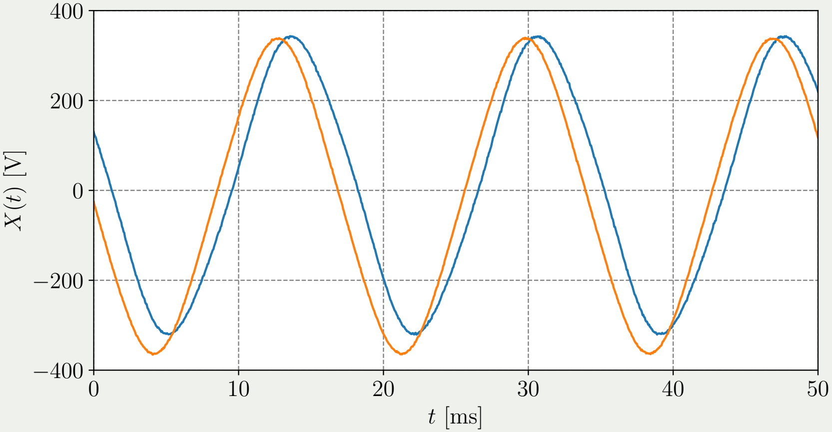
Sequência de lançamento de dois dados (soma dos resultados).



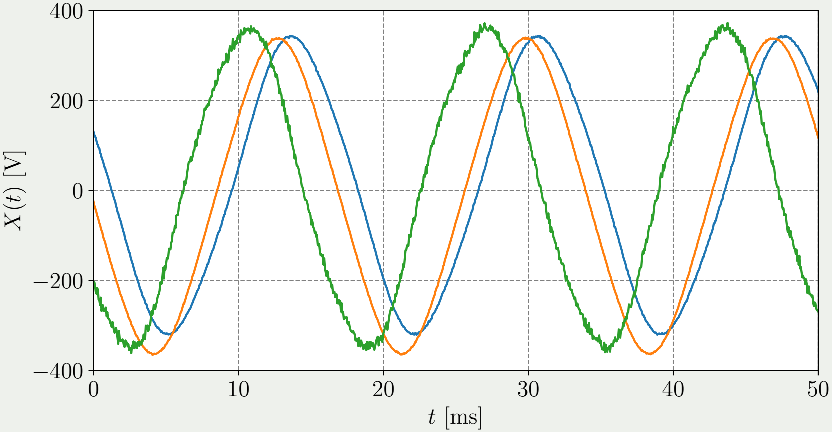
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).



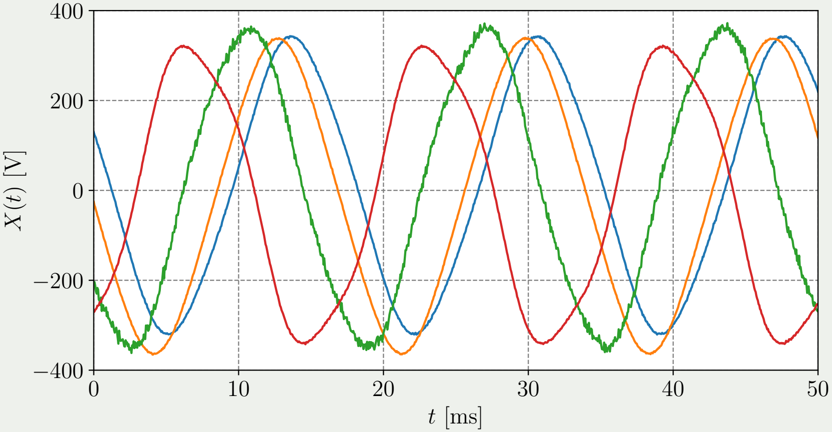
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica (220 V e 60 Hz).



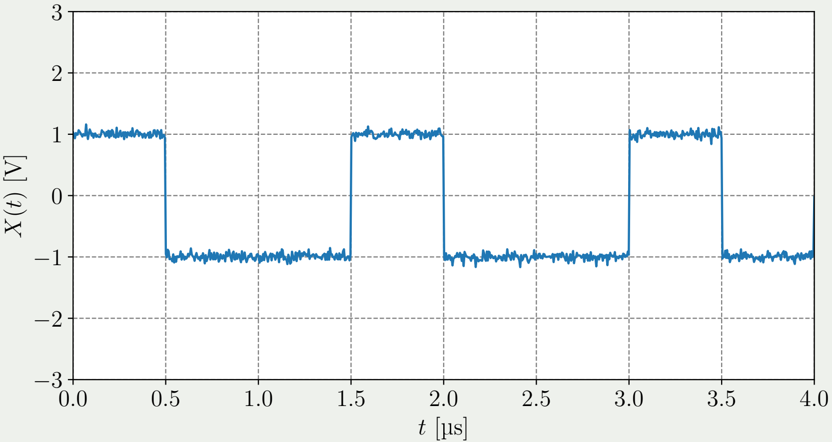
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica ($220\,\text{V}$ e $60\,\text{Hz}$).



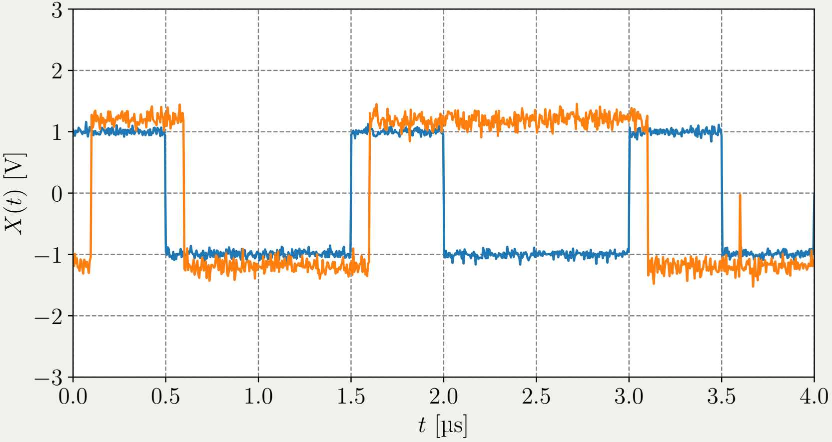
Forma de onda de tensão de uma rede elétrica ($220\,\mathrm{V}$ e $60\,\mathrm{Hz}$).



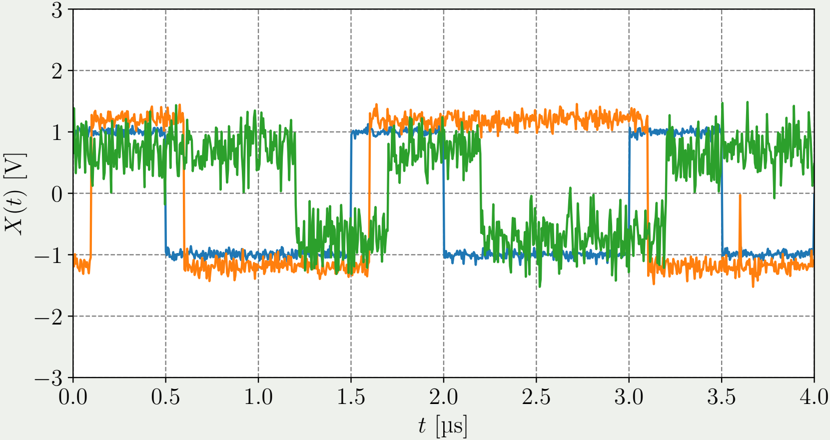
Sinal recebido em um sistema de comunicação (± 1 V e 2 Mbit/s).



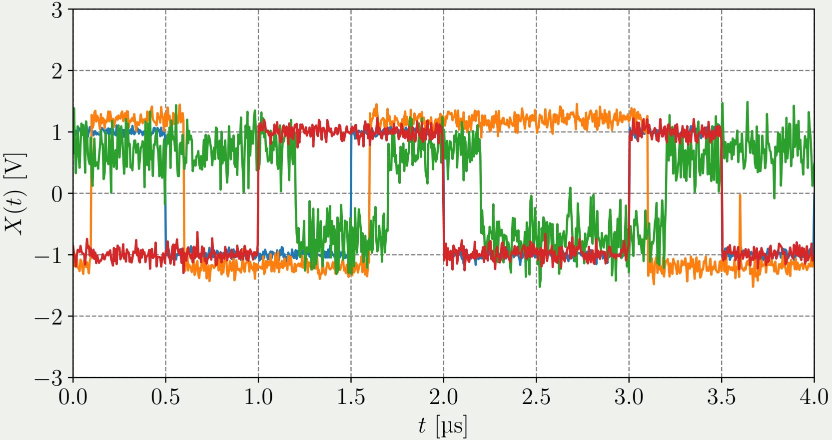
Sinal recebido em um sistema de comunicação (± 1 V e 2 Mbit/s).



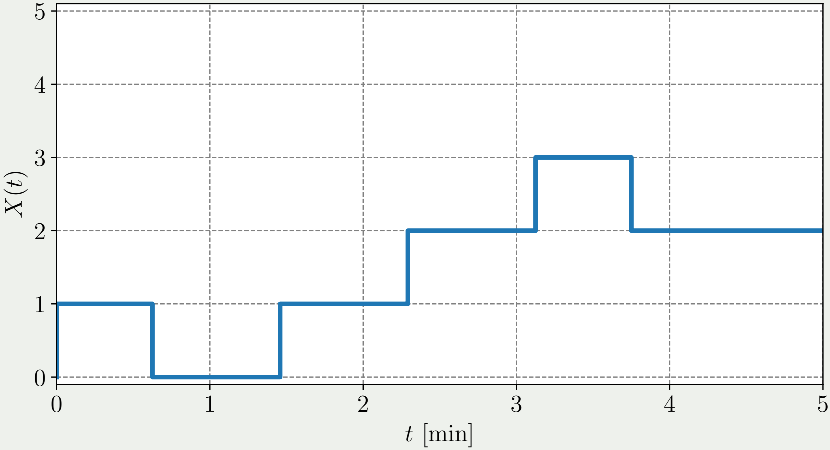
Sinal recebido em um sistema de comunicação (± 1 V e 2 Mbit/s).



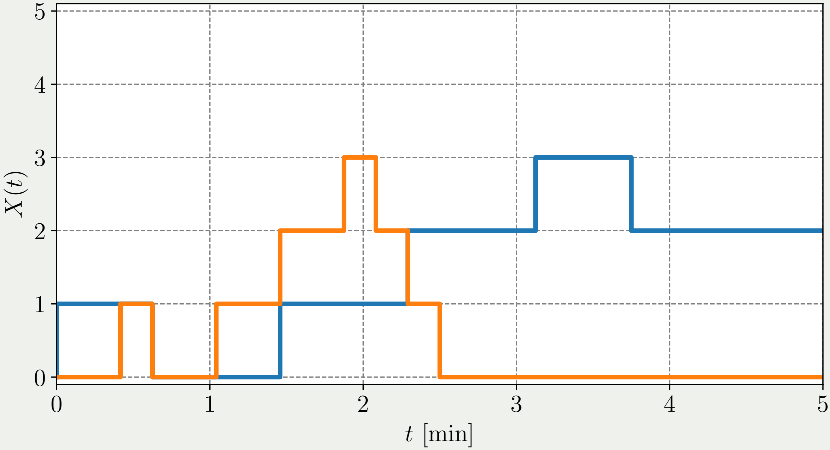
Sinal recebido em um sistema de comunicação (± 1 V e 2 Mbit/s).



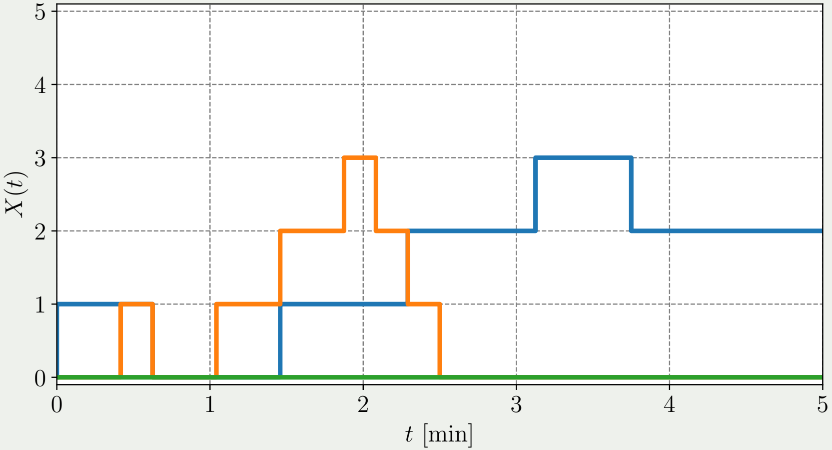
Número de clientes em uma fila.



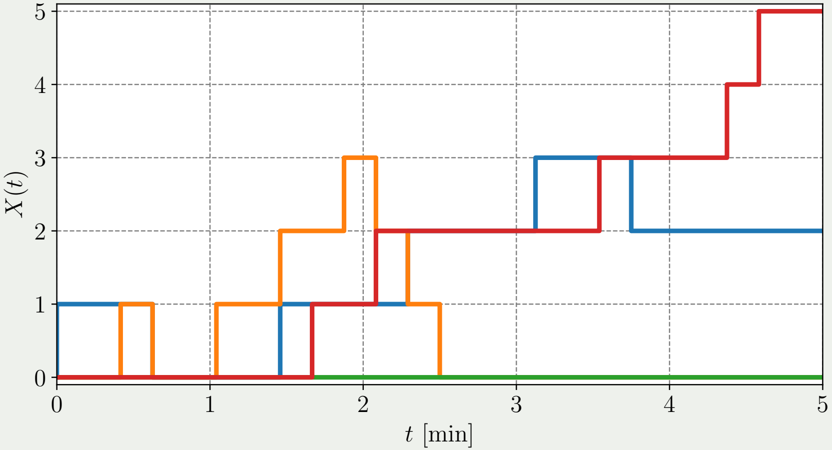
Número de clientes em uma fila.



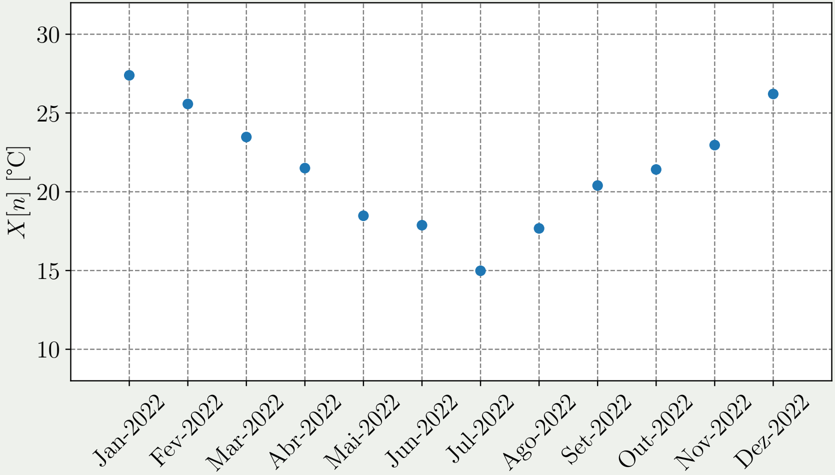
Número de clientes em uma fila.



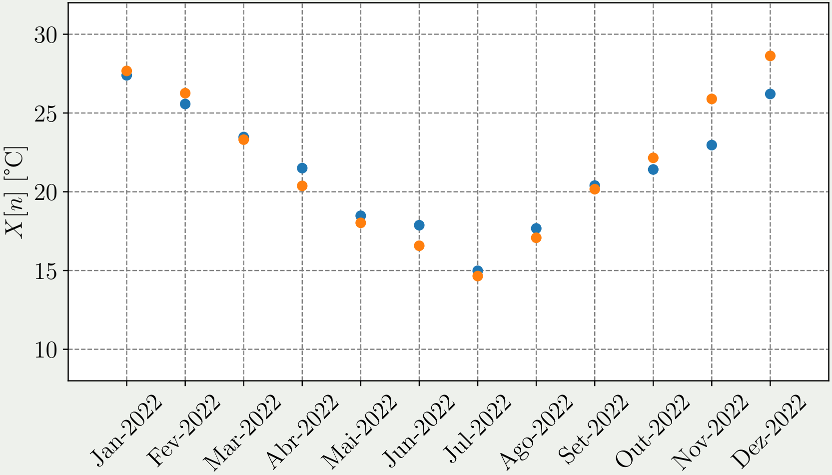
Número de clientes em uma fila.



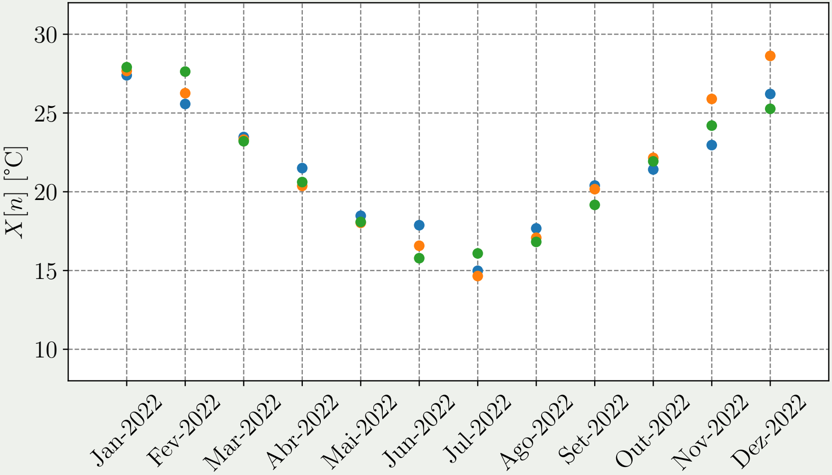
Temperatura média mensal em uma região.



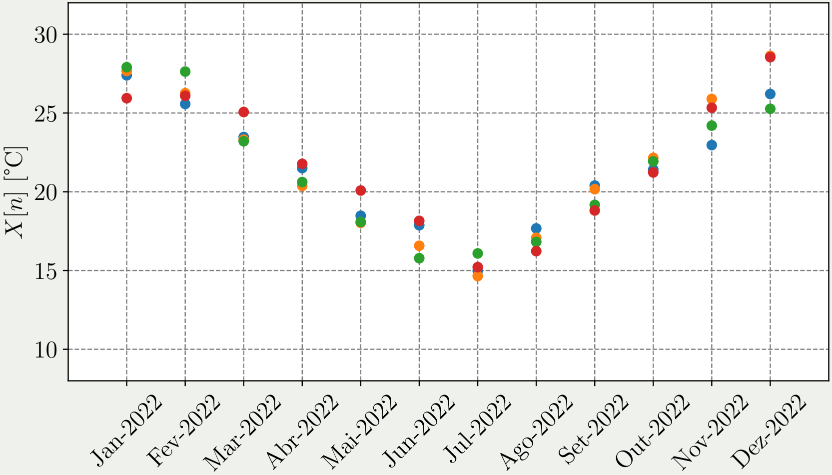
Temperatura média mensal em uma região.



Temperatura média mensal em uma região.



Temperatura média mensal em uma região.



PDFs de um processo estocástico

Definição

A **PDF de primeira ordem** de um processo estocástico $X(t)$ é dada por

$$f_{X(t)}(x)$$

A PDF de primeira ordem pode ser interpretada como uma **família de PDFs** indexada pelo tempo t.

Exemplo

Sejam $A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}([0,1])$ e considere o PE

$$X(t) = (B - A)t + A,$$

definido para $t \in [0,1]$.

a. Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.
b. Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo

a. Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

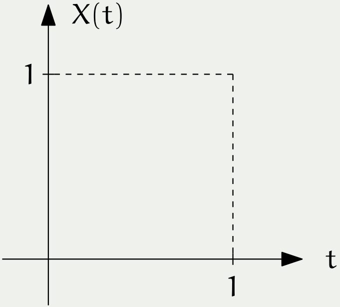
a. Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}([0, 1])$$

Exemplo

a. Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

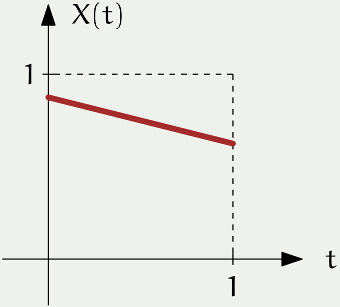
$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}([0, 1])$$



Exemplo

a) Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

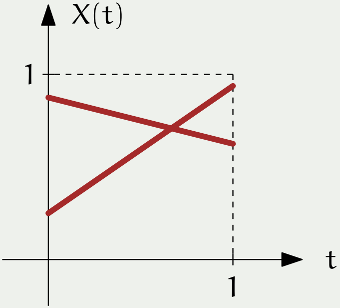
$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}([0,1])$$



Exemplo

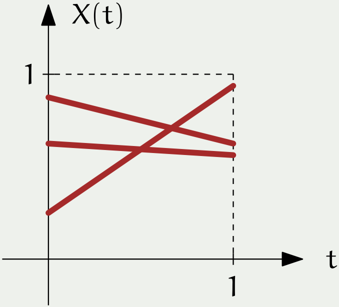
a Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}([0, 1])$$



a. Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

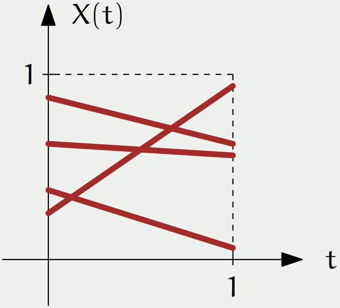
$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}([0, 1])$$



Exemplo

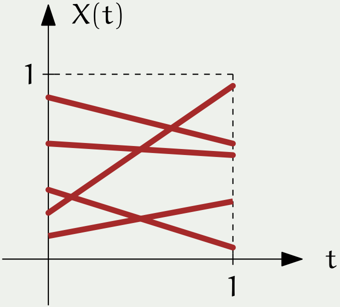
a) Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}([0, 1])$$



a Esboce algumas funções-amostra de $X(t)$.

$$X(t) = (B - A)t + A, \qquad A, B \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Unif}([0, 1])$$



Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo

Parênteses: Soma de variáveis aleatórias independentes.

Teorema [Yates, Cap. 6]

Sejam X e Y duas VAs independentes. Então, a PDF de $W = X + Y$ é dada por

$$f_W = f_X \star f_Y,$$

em que $\star$ denota convolução.

Exemplo

b. Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB} + \underbrace{(1-t)A}$$

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB} + \underbrace{(1-t)A}$$

Ou seja, $X(t)$ é a soma de duas VAs independentes.

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB}_{\mathrm{Unif}([0,t])} + \underbrace{(1-t)A}_{\mathrm{Unif}([0,1-t])}$$

Ou seja, $X(t)$ é a soma de duas VAs independentes.

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Tem-se

$$X(t) = (B - A)t + A = \underbrace{tB}_{\mathrm{Unif}([0,t])} + \underbrace{(1-t)A}_{\mathrm{Unif}([0,1-t])}$$

Ou seja, $X(t)$ é a soma de duas VAs independentes.

Portanto, a PDF de $X(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= \frac{1}{t}[0 \leq x \leq t] \star \frac{1}{1-t}[0 \leq x \leq 1-t] \\ &= \frac{1}{t(1-t)}\Big([0 \leq x \leq t] \star [0 \leq x \leq 1-t]\Big) \end{aligned}$$

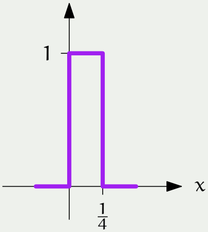
Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo para $t = 1/4$:

- **b** Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

  Exemplo para $t = 1/4$:

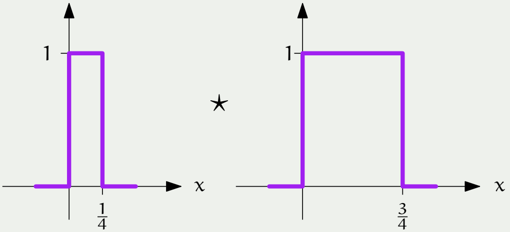


$[0 \leqslant x \leqslant 1/4]$

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo para $t = 1/4$:

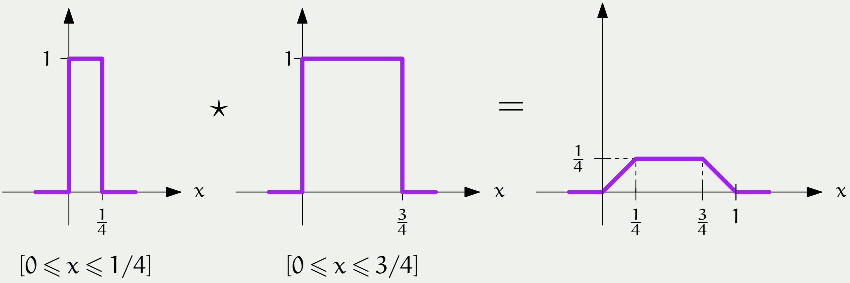


$[0 \leqslant x \leqslant 1/4]$ $[0 \leqslant x \leqslant 3/4]$

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

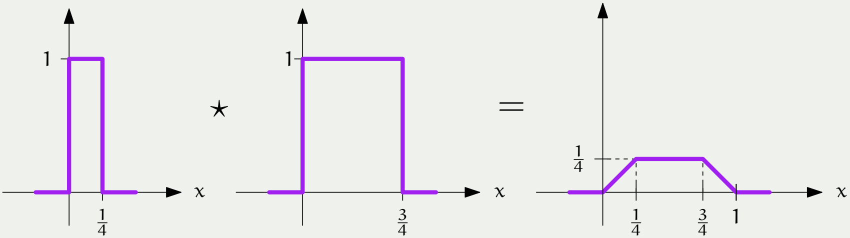
Exemplo para $t = 1/4$:



Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Exemplo para $t = 1/4$:



$[0 \leqslant x \leqslant 1/4]$ $[0 \leqslant x \leqslant 3/4]$

$$f_{X(1/4)}(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exemplo

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Generalizando: **GeoGebra**

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{t(1-t)} \begin{cases} x, & 0 \le x \le t^* \\ t^*, & t^* \le x \le 1-t^* \\ 1-x, & 1-t^* \le x \le 1 \end{cases}$$

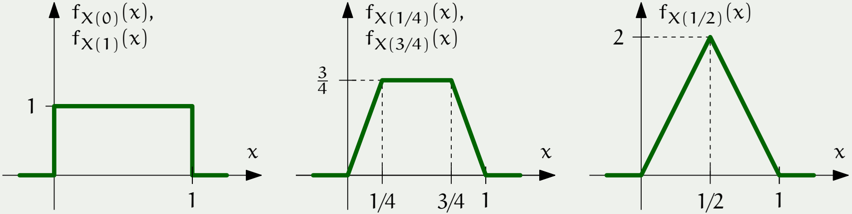
onde $t^* = \min(t, 1-t)$.

b Determine a PDF de primeira ordem de $X(t)$.

Generalizando: **GeoGebra**

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{t(1-t)} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t^* \\ t^*, & t^* \leq x \leq 1-t^* \\ 1-x, & 1-t^* \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde $t^* = \min(t, 1-t)$.



PDF de segunda ordem

Definição

A **PDF de segunda ordem** de um processo estocástico $X(t)$ é dada por

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$$

A PDF de segunda ordem pode ser interpretada como uma **família de PDFs** indexada pelos tempos t_1 e t_2.

Exemplo

Sejam $A, B \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}(\{-1, 1\})$ e considere o PE dado por

$$X(t) = A \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

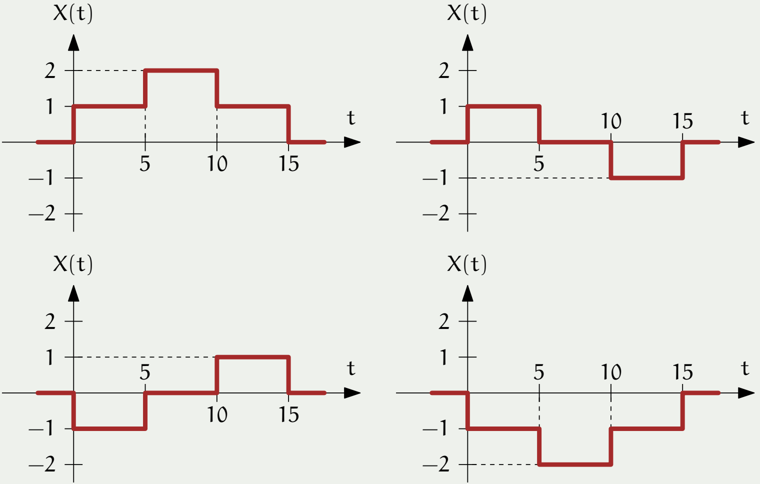
a. Esboce todas as funções-amostra de $X(t)$.
b. Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.
c. Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Exemplo

a) Esboce todas as funções-amostra de $X(t)$.

Exemplo

a. Esboce todas as funções-amostra de $X(t)$.



Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $\quad X(t) = 0$

Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $X(t) = 0$

Caso $0 < t < 5$: $X(t) = A$

Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B \operatorname{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $\quad X(t) = 0$

Caso $0 < t < 5$: $\quad X(t) = A$

Caso $5 < t < 10$: $\quad X(t) = A + B$

Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $X(t) = 0$
Caso $0 < t < 5$: $X(t) = A$
Caso $5 < t < 10$: $X(t) = A + B$
Caso $10 < t < 15$: $X(t) = B$

Exemplo

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $X(t) = 0$

Caso $0 < t < 5$: $X(t) = A$

Caso $5 < t < 10$: $X(t) = A + B$

Caso $10 < t < 15$: $X(t) = B$

Caso $t > 15$: $X(t) = 0$

b Determine a PMF de primeira ordem de $X(t)$.

$$X(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{10}\right) + B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-10}{10}\right)$$

Caso $t < 0$: $X(t) = 0$
Caso $0 < t < 5$: $X(t) = A$
Caso $5 < t < 10$: $X(t) = A + B$
Caso $10 < t < 15$: $X(t) = B$
Caso $t > 15$: $X(t) = 0$

Portanto: **GeoGebra**

$$p_{X(t)}(x) = \begin{cases} \delta[x], & t < 0 \text{ ou } t > 15 \\ \frac{1}{2}\delta[x+1] + \frac{1}{2}\delta[x-1], & 0 < t < 5 \text{ ou } 10 < t < 15 \\ \frac{1}{4}\delta[x+2] + \frac{1}{2}\delta[x] + \frac{1}{4}\delta[x-2], & 5 < t < 10 \end{cases}$$

Exemplo

c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

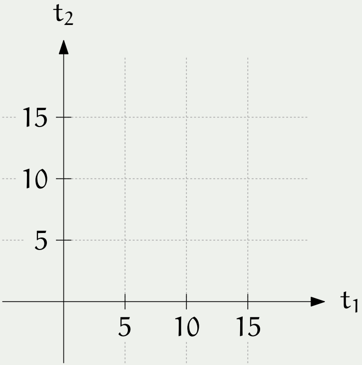
Exemplo

c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Deseja-se $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$.

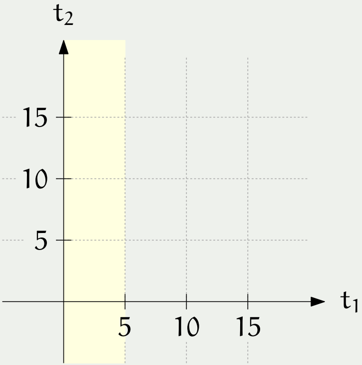
c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Deseja-se $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$. Há 25 casos possíveis para t_1 e t_2.



c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Deseja-se $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$. Há 25 casos possíveis para t_1 e t_2. Como exemplo, consideraremos apenas os casos em que $0 < t_1 < 5$.



- c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Caso $0 < t_1 < 5$ e $0 < t_2 < 5$:

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = A$$

$p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$					
	$x_2 = -2$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = +1$	$x_2 = +2$
$x_1 = -2$	0	0	0	0	0
$x_1 = -1$	0	1/2	0	0	0
$x_1 = 0$	0	0	0	0	0
$x_1 = +1$	0	0	0	1/2	0
$x_1 = +2$	0	0	0	0	0

c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Caso $0 < t_1 < 5$ e $5 < t_2 < 10$:

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = A + B$$

$p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$					
	$x_2 = -2$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = +1$	$x_2 = +2$
$x_1 = -2$	0	0	0	0	0
$x_1 = -1$	$1/4$	0	$1/4$	0	0
$x_1 = 0$	0	0	0	0	0
$x_1 = +1$	0	0	$1/4$	0	$1/4$
$x_1 = +2$	0	0	0	0	0

c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Caso $0 < t_1 < 5$ e $10 < t_2 < 15$:

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = B$$

$p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$					
	$x_2 = -2$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = +1$	$x_2 = +2$
$x_1 = -2$	0	0	0	0	0
$x_1 = -1$	0	1/4	0	1/4	0
$x_1 = 0$	0	0	0	0	0
$x_1 = +1$	0	1/4	0	1/4	0
$x_1 = +2$	0	0	0	0	0

c Determine a PMF de segunda ordem de $X(t)$.

Caso $0 < t_1 < 5$ e ($t_2 < 0$ ou $t_2 > 15$):

$$X(t_1) = A \quad \text{e} \quad X(t_2) = 0$$

$p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$					
	$x_2 = -2$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = +1$	$x_2 = +2$
$x_1 = -2$	0	0	0	0	0
$x_1 = -1$	0	0	1/2	0	0
$x_1 = 0$	0	0	0	0	0
$x_1 = +1$	0	0	1/2	0	0
$x_1 = +2$	0	0	0	0	0

PDF de ordem k

Definição

A **PDF de ordem** k de um processo estocástico $X(t)$ é a família de PDFs

$$f_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}(x_1,\ldots x_k), \quad \forall t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{R}$$

Note que PDF de ordem k depende dos tempos $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Um processo estocástico é dito estar **completamente especificado** se sua distribuição de ordem k for conhecida para todo k (na forma de PDF, PMF ou CDF).

Função média e
função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo estocástico.

Definição

A **função média** de $X(t)$ é definida por

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

e a **função autocovariância** de $X(t)$ é definida por

$$C_X(t_1, t_2) = \mathrm{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

Seja $X(t)$ um processo estocástico.

Definição

A **função média** de $X(t)$ é definida por

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

e a **função autocovariância** de $X(t)$ é definida por

$$C_X(t_1, t_2) = \text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

Obs: Define-se também a **função variância**:

$$\sigma_X^2(t) = \text{var}[X(t)] = C_X(t, t)$$

Exemplo: Sinal representando dois bits

Exemplo

Considere um PE $X(t)$ dado por

$$X(t) = B_1 \,\mathrm{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \,\mathrm{rect}(t - 1{,}5)$$

onde $B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}(\{0, 1\})$.

a. Determine a função média de $X(t)$.
b. Determine a função autocovariância de $X(t)$.

Exemplo: Sinal representando dois bits

a. Determine a função média de $X(t)$.

Exemplo: Sinal representando dois bits

a Determine a função média de $X(t)$.

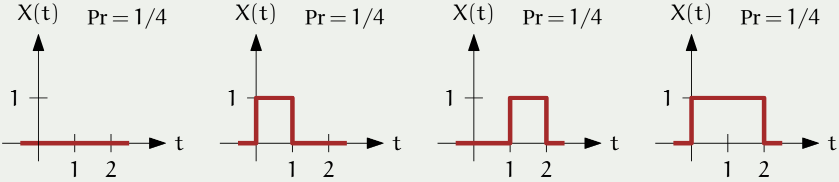
Serão apresentadas duas soluções.

Solução 1. A partir dos sinais-amostra.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

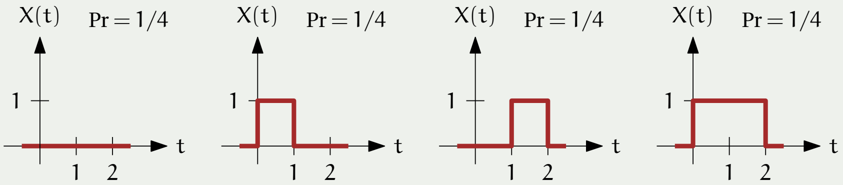
Solução 1. A partir dos sinais-amostra.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$



Solução 1. A partir dos sinais-amostra.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$



$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= \tfrac{1}{4}(0) + \tfrac{1}{4}[0 \leq t < 1] + \tfrac{1}{4}[1 \leq t < 2] + \tfrac{1}{4}[0 \leq t < 2] \\
&= \tfrac{1}{2}[0 \leq t < 2]
\end{aligned}$$

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

Exemplo: Sinal representando dois bits

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)] \end{aligned}$$

Exemplo: Sinal representando dois bits

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)] \\ &= E[B_1] \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + E[B_2] \operatorname{rect}(t - 1{,}5) \end{aligned}$$

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= E[B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)] \\
&= E[B_1] \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + E[B_2] \operatorname{rect}(t - 1{,}5) \\
&= \tfrac{1}{2} \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + \tfrac{1}{2} \operatorname{rect}(t - 1{,}5)
\end{aligned}$$

Solução 2. A partir da fórmula do PE.

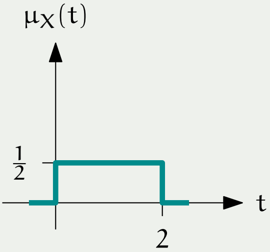
$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \mathrm{E}[X(t)] \\
&= \mathrm{E}[B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)] \\
&= \mathrm{E}[B_1] \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + \mathrm{E}[B_2] \operatorname{rect}(t - 1{,}5) \\
&= \tfrac{1}{2} \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + \tfrac{1}{2} \operatorname{rect}(t - 1{,}5) \\
&= \tfrac{1}{2} [0 \le t < 2]
\end{aligned}$$

a. Determine a função média de $X(t)$.

Portanto,

$$\mu_X(t) = \frac{1}{2}[0 \leq t < 2] = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$



Exemplo: Sinal representando dois bits

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

Exemplo: Sinal representando dois bits

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$X(t) \;=\; B_1 \,\mathrm{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \,\mathrm{rect}(t - 1{,}5), \qquad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Unif}(\{0, 1\})$$

Caso t_1 e t_2 estiverem no mesmo intervalo de bit:

$$C_X(t_1, t_2) = \mathrm{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \mathrm{cov}[B_i, B_i] = \mathrm{var}[B_i] = \frac{1}{4}$$

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

Caso t_1 e t_2 estiverem no mesmo intervalo de bit:

$$C_X(t_1, t_2) = \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \operatorname{cov}[B_i, B_i] = \operatorname{var}[B_i] = \frac{1}{4}$$

Caso t_1 e t_2 estiverem em intervalos de bits diferentes:

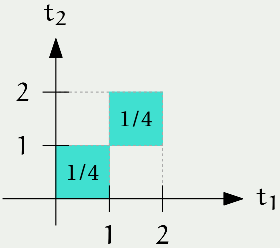
$$C_X(t_1, t_2) = \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] = \operatorname{cov}[B_i, B_j] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i}}}{=} 0$$

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5), \quad B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$$

Portanto,

$$C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\left[\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor\right]$$



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a, b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Unif}(-\pi, \pi)$.

a. Determine a função média de $X(t)$.
b. Determine a função autocovariância de $X(t)$.

GeoGebra

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a. Determine a função média de $X(t)$.

a Determine a função média de $X(t)$.

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a Determine a função média de $X(t)$.

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b]\end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a. Determine a função média de $X(t)$.

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\ &= a\,E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b\end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a) Determine a função média de $X(t)$.

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Theta)] + b
\end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a) Determine a função média de $X(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Theta)] + b \\
&= a\cos(2\pi f_0 t)\,E[\cos(\Theta)] \;+\; a\sin(2\pi f_0 t)\,E[\sin(\Theta)] + b
\end{aligned}
$$

a Determine a função média de $X(t)$.

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Theta)] + b \\
&= a\cos(2\pi f_0 t)\,E[\cos(\Theta)] \; + \; a\sin(2\pi f_0 t)\,E[\sin(\Theta)] + b
\end{aligned}$$

$$E[\cos(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0.$$

$$E[\sin(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0.$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

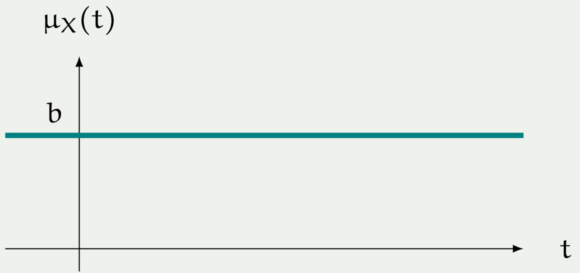
a Determine a função média de $X(t)$.

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E[X(t)] \\
&= E[a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b] \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t - \Theta)] + b \\
&= a\,E[\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Theta) + \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Theta)] + b \\
&= a\cos(2\pi f_0 t)\,E[\cos(\Theta)] \;+\; a\sin(2\pi f_0 t)\,E[\sin(\Theta)] + b \\
&= b.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\cos(\Theta)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\cos(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0. \\
E[\sin(\Theta)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(\theta)\frac{1}{2\pi}\,d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

a) Determine a função média de $X(t)$.



Exemplo: Cosseno com fase aleatória

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$C_X(t_1, t_2) = \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)]$$

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= \mathrm{E}\left[\Big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\Big)\Big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\Big)\right] \end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= \mathrm{E}\Big[\Big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\Big)\Big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\Big)\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[a\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\, a\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \end{aligned}$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\
&= \mathrm{E}\Big[\Big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\Big)\Big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\Big)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[a\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\; a\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \\
&= a^2\,\mathrm{E}\Big[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big]
\end{aligned}
$$

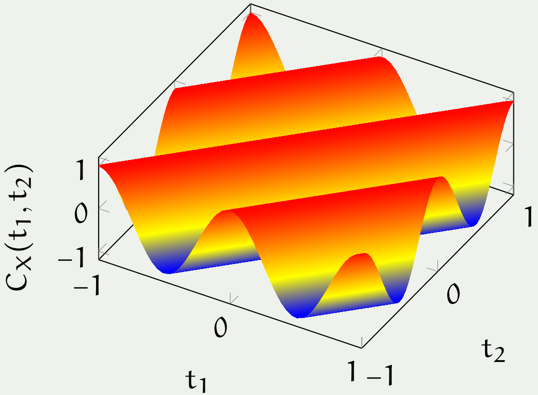
b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\
&= E\Big[\Big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\Big)\Big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\Big)\Big] \\
&= E\Big[a\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\; a\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \\
&= a^2\, E\Big[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \\
&= \frac{a^2}{2}\, E\Big[\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) - 2\Theta)\Big]
\end{aligned}$$

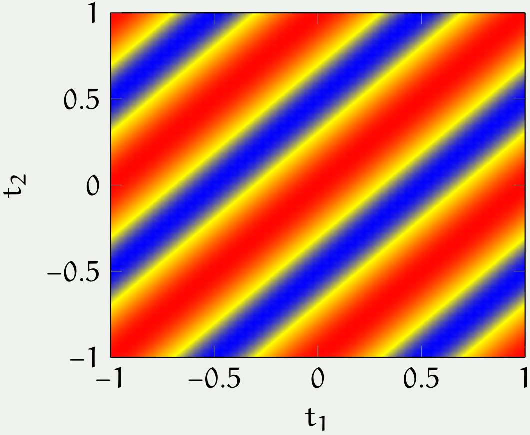
b Determine a função autocovariância de $X(t)$.

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= \operatorname{cov}[X(t_1), X(t_2)] \\
&= E\Big[\Big(X(t_1) - \mu_X(t_1)\Big)\Big(X(t_2) - \mu_X(t_2)\Big)\Big] \\
&= E\Big[a\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\; a\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \\
&= a^2\, E\Big[\cos(2\pi f_0 t_1 - \Theta)\cos(2\pi f_0 t_2 - \Theta)\Big] \\
&= \frac{a^2}{2} E\Big[\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2) - 2\Theta)\Big] \\
&= \frac{a^2}{2}\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1))
\end{aligned}
$$

b Determine a função autocovariância de $X(t)$.



- **b** Determine a função autocovariância de $X(t)$.



Exemplo

Seja $B[n] \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Bern}(1/2)$ uma sequência de bits aleatórios. Seja

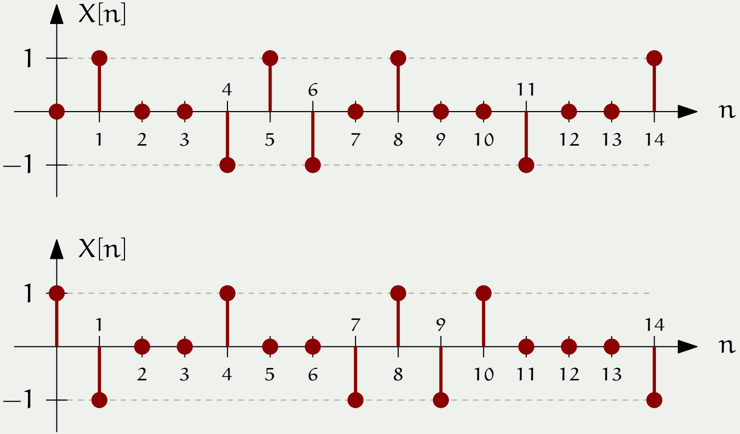
$$X[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } B[n] = 0, \\ \pm 1, & \text{alternadamente, se } B[n] = 1. \end{cases}$$

a. Determine a função média de $X[n]$.
b. Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Alternate Mark Inversion

Exemplo: Sinalização AMI

Exemplos de sinais amostra:



Exemplo: Sinalização AMI

a Determine a função média de $X[n]$.

Exemplo: Sinalização AMI

a Determine a função média de $X[n]$.

$$\mu_X[n] = E[X[n]]$$

Exemplo: Sinalização AMI

a Determine a função média de $X[n]$.

$$\begin{aligned} \mu_X[n] &= \mathrm{E}[X[n]] \\ &= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} \end{aligned}$$

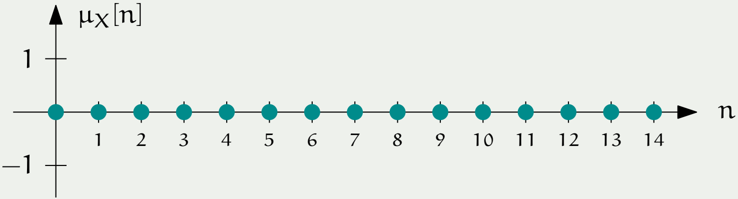
Exemplo: Sinalização AMI

a Determine a função média de $X[n]$.

$$\begin{aligned}
\mu_X[n] &= E[X[n]] \\
&= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

a Determine a função média de $X[n]$.

$$
\begin{aligned}
\mu_X[n] &= E[X[n]] \\
&= (-1)\frac{1}{4} + (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}
$$



b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

$$C_X[n_1, n_2] = \operatorname{cov}[X[n_1], X[n_2]] = E[X[n_1]X[n_2]]$$

Exemplo: Sinalização AMI

b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Para $n_2 = n_1$: $\quad C_X[n,n] \; = \; +\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C_X[n,n] &= E[X^2[n]] \\ &= (-1)^2\frac{1}{4} + (0)^2\frac{1}{2} + (1)^2\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Para $n_2 = n_1 \pm 1$: $$C_X[n, n \pm 1] = -\frac{1}{4}$$

Bits	$X[n]$	$X[n+1]$	Pr	$X[n]X[n+1]\,\mathrm{Pr}$
00	0	0	$1/4$	0
01	0	$+1$	$1/8$	0
	0	-1	$1/8$	0
10	$+1$	0	$1/8$	0
	-1	0	$1/8$	0
11	$+1$	-1	$1/8$	$-1/8$
	-1	$+1$	$1/8$	$-1/8$

b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Para $n_2 = n_1 \pm 2$: $C_X[n, n \pm 2] \ = \ 0$

Bits	$X[n]$	$X[n+1]$	$X[n+2]$	$\Pr$	$X[n]X[n+2]\Pr$
101	$+1$ -1	0 0	-1 $+1$	$1/16$ $1/16$	$-1/16$ $-1/16$
111	$+1$ -1	-1 $+1$	$+1$ -1	$1/16$ $1/16$	$+1/16$ $+1/16$
(*outros*)	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	0

b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Para $n_2 = n_1 \pm k$, com $k \geq 2$: $C_X[n, n \pm k] = 0$ (Por que?)

Assim,

$$C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

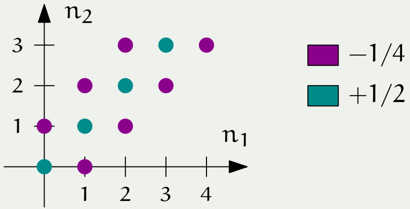
Exemplo: Sinalização AMI

b Determine a função autocovariância de $X[n]$.

Para $n_2 = n_1 \pm k$, com $k \geq 2$: $\quad C_X[n, n \pm k] = 0 \quad$ (Por que?)

Assim,

$$C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
***Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos*.**
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes*.**
Wiley, 3rd edition, 2014.