# Processos Estocásticos

## Processos estocásticos estacionários no sentido amplo

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
Engenharia de Telecomunicações

Instituto Federal
Santa Catarina
Câmpus
São José

# Introdução

## Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de $t$.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de $t_1$ e $t_2$ apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

## Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de $t$.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de $t_1$ e $t_2$ apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \qquad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t + \tau) \qquad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$

## Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de $t$.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de $t_1$ e $t_2$ apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \qquad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t+\tau) \qquad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$

No caso de tempo discreto, $(t) \to [n]$ e $(\tau) \to [\ell]$.

# Exemplo revisitado: Sinal representando dois bits

## Exemplo

Considere um PE $X(t)$ dado por

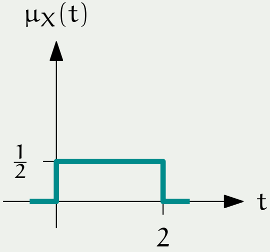
$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)$$

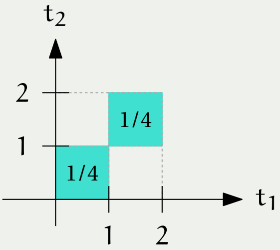
onde $B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \operatorname{Unif}(\{0, 1\})$.

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \tfrac{1}{2}[0 \le t < 2] \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\Big[\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor\Big]$$

Gráficos:

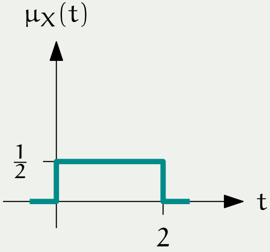


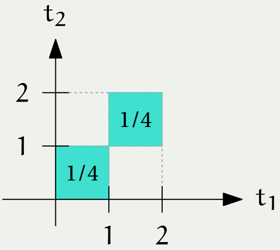



Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \tfrac{1}{2}[0 \leq t < 2] \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\Big[\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor\Big]$$

Gráficos:




Portanto, $X(t)$ não é ESA.

# Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

## Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que $a$, $b$ e $f_0$ são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Unif}(-\pi, \pi)$.

# Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

Já foi mostrado que

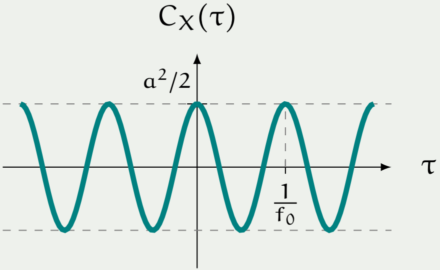
$$\mu_X(t) = b \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0(t_2 - t_1))$$

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = b \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1))$$

Portanto, $X(t)$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = b \qquad \text{e} \qquad C_X(\tau) = \tfrac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$$



## Exemplo

Seja $B[n] \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bern}(1/2)$ uma sequência de bits aleatórios. Seja

$$X[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } B[n] = 0, \\ \pm 1, & \text{alternadamente, se } B[n] = 1. \end{cases}$$

# Exemplo revisitado: Sinalização AMI

Já foi mostrado que

$$\mu_X[n] = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

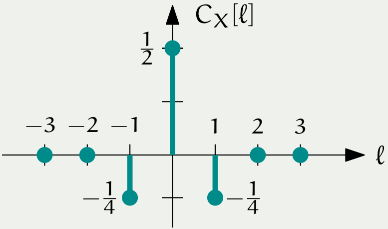
# Exemplo revisitado: Sinalização AMI

Já foi mostrado que

$$\mu_X[n] = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto, $X[n]$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[\ell] = \frac{1}{2}\delta[\ell] - \frac{1}{4}\delta[\ell - 1] - \frac{1}{4}\delta[\ell + 1]$$



## Exemplo

Seja $X[n] \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$ uma sequência aleatória. Defina

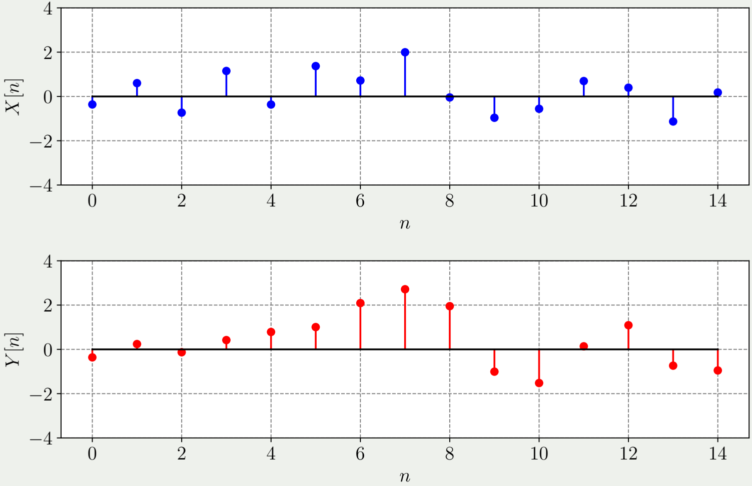
$$Y[n] = X[n] + X[n-1].$$

a. Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$. Conclua que $X[n]$ é ESA.
b. Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$. Conclua que $Y[n]$ também é ESA.

Quando conveniente, usaremos $X_n$ no lugar de $X[n]$.

# Exemplo: Filtragem FIR

Exemplo de sequências-amostra:



# Exemplo: Filtragem FIR

a. Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$$

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

**Função média:**

$$\mu_X[n] \;=\; E[X_n] \;=\; 0, \quad \forall n$$

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

**Função média:**

$$\mu_X[n] = E[X_n] = 0, \quad \forall n$$

**Função autocovariância:**

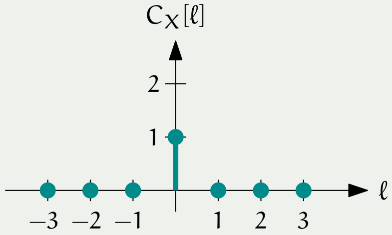
$$C_X[n_1, n_2] = \operatorname{cov}\left[X_{n_1}, X_{n_2}\right] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

Portanto, $X[n]$ é ESA com:

$$\mu_X = 0 \quad \text{e} \quad C_X[\ell] = \delta[\ell]$$



# Exemplo: Filtragem FIR

- b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função média:**

$$\mu_Y[n] = E[Y_n]$$

**b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função média:**

$$\begin{aligned} \mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}] \end{aligned}$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função média:**

$$
\begin{aligned}
\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\
&= E[X_n + X_{n-1}] \\
&= E[X_n] + E[X_{n-1}]
\end{aligned}
$$

**b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função média:**

$$
\begin{aligned}
\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\
&= E[X_n + X_{n-1}] \\
&= E[X_n] + E[X_{n-1}] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$C_Y[n_1, n_2] = \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}]$$

- **b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]}
\end{aligned}
$$

**b** Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\, \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\,\cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\
&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

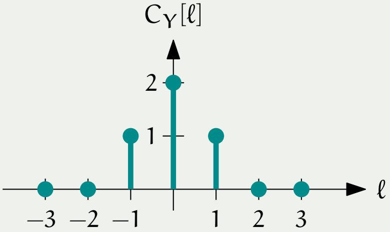
**Função autocovariância:**

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= \mathrm{E}[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{\mathrm{E}[Y_{n_1}]}\, \cancel{\mathrm{E}[Y_{n_2}]} \\
&= \mathrm{E}[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= \mathrm{E}[X_{n_1} X_{n_2}] + \mathrm{E}[X_{n_1} X_{n_2-1}] + \mathrm{E}[X_{n_1-1} X_{n_2}] + \mathrm{E}[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\
&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell] \\
&= 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \qquad \text{e} \qquad C_Y[\ell] = 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]$$



# Relação entre estacionariedades

## Teorema

$$\text{ESE} \implies \text{ESA}$$

Mas a recíproca não é verdadeira!

## Exemplo: *Processo estocástico do carnaval*

Seja $X[n]$ uma sequência de VAs i.i.d. que assumem o valor $2$ com probabilidade $\frac{1}{5}$ e o valor $-\frac{1}{2}$ com probabilidade $\frac{4}{5}$. Seja $Y[n]$ a sequência aleatória

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

a. Mostre que $Y[n]$ não é ESE.
b. Mostre que $Y[n]$ é ESA.

# Contraexemplo

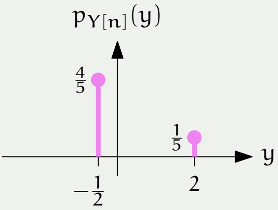
a. Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

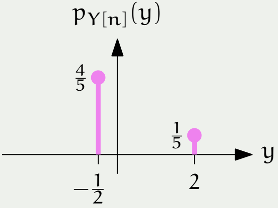
Para $n$ par:



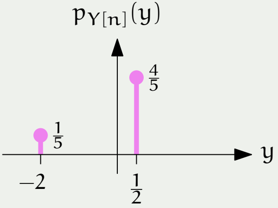
a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:

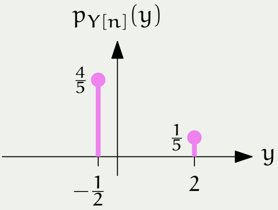


# Contraexemplo

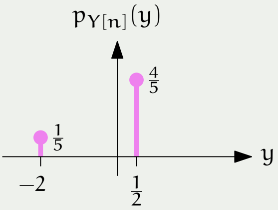
a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:




Portanto, $Y[n]$ não é estacionário de 1ª ordem.

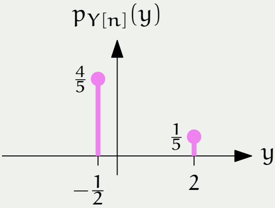
Sendo assim, não pode ser ESE.

# Contraexemplo

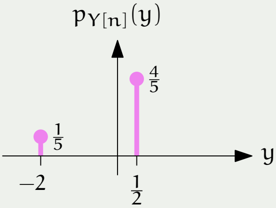
b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

**b** Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:

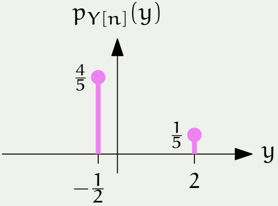



Para $n$ ímpar:

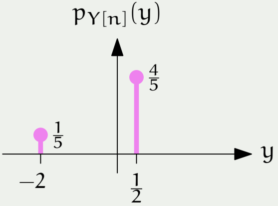


**b** Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:



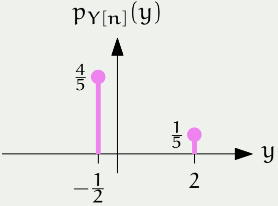

**Função média:**

$$\mu_Y[n] = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} + (2)\frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2)\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 0, \quad \forall n \quad \checkmark$$

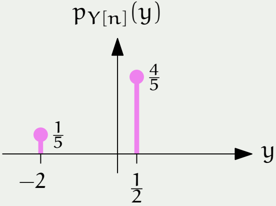
# Contraexemplo

**b** Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:

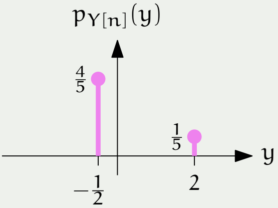



**Variância de $Y[n]$:**

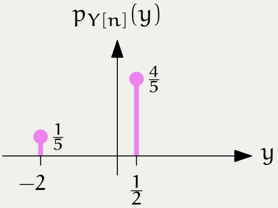
$$\operatorname{var}[Y[n]] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{média } 0}}{=} E[Y[n]^2] = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} + (2)^2 \frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 1, \quad \forall n$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:

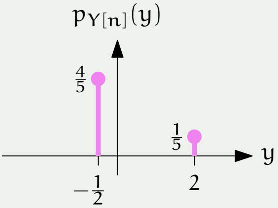



**Função autocovariância:**

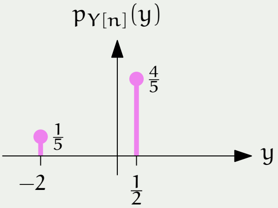
$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} \text{var}[Y[n]], & n_1 = n_2 = n \\ \text{cov}[Y[n_1], Y[n_2]], & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:

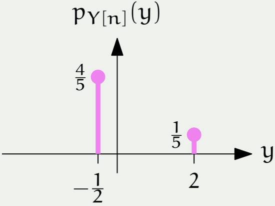



**Função autocovariância:**

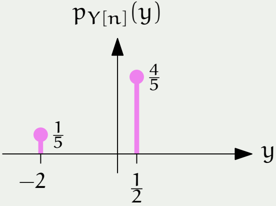
$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad \checkmark$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para $n$ par:




Para $n$ ímpar:




Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \quad \text{e} \quad C_Y[\ell] = \delta[\ell]$$

# Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

# Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

   $C_X(\tau) = C_X(-\tau)$

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

   $C_X(\tau) = C_X(-\tau)$

2. **Valor na origem**

   $C_X(0) = \sigma_X^2$

# Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

   $$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$

2. **Valor na origem**

   $$C_X(0) = \sigma_X^2$$

3. **Faixa de valores** (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

   $$-\sigma_X^2 \leq C_X(\tau) \leq \sigma_X^2$$

# Análise no domínio da frequência

Seja $x(t)$ um sinal *determinístico*.

## Definição

A **transformada de Fourier** de $x(t)$ é dada por

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

A **transformada de Fourier inversa** de $\hat{x}(f)$ é dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{j2\pi f t} \, df$$


J.-B. Joseph Fourier (1768–1830)

Diz-se que $x(t)$ e $\hat{x}(f)$ são **pares transformados de Fourier**.

# Densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo estocástico (real) ESA.

## Definição

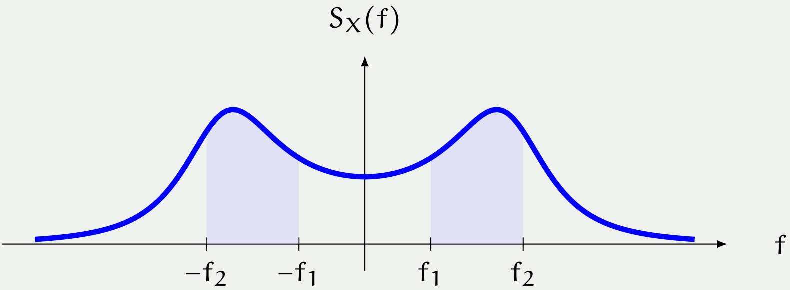
A **densidade espectral de potência** de $X(t)$ é definida por

$$S_X(f) = \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{T} |\hat{X}_T(f)|^2\right],$$

em que $\hat{X}_T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\}$.

A densidade espectral de potência é tal que a potência de $X(t)$ na faixa de frequência $[f_1, f_2]$ é dada por

$$P_X^{[f_1,f_2]} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_X(f)\, df$$



# Propriedades da densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $$\mathrm{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

# Propriedades da densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $$\mathrm{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2. **Função par**

   $$S_X(f) = S_X(-f)$$

# Propriedades da densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $$\operatorname{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2. **Função par**

   $$S_X(f) = S_X(-f)$$

3. **Função não-negativa**

   $$S_X(f) \geq 0$$

# Teorema de Wiener–Khinchin

Seja $X(t)$ um processo estocástico ESA.

## Teorema

$$S_X(f) = \mathcal{F}_\tau\{C_X(\tau) + \mu_X^2\}$$

ou

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} - \mu_X^2$$

Ou seja, as funções autocovariância e densidade espectral de potência são pares transformados de Fourier, a menos de um termo constante.

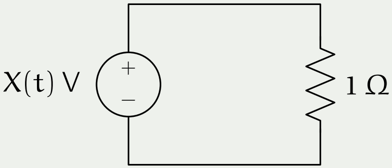
Seja $X(t)$ um processo estocástico (real) ESA.

## Definição

A **potência média** de $X(t)$, denotada por $P_X$, é definida por

$$P_X = \mathrm{E}\left[X^2(t)\right].$$

Note que $P_X$ é uma constante, pois $X(t)$ é ESA.




*Obs:* A palavra *média* é no sentido probabilístico, e não temporal.

# Potência média de um PE ESA

## Teorema

A potência média pode ser calculada no *domínio do tempo* por

$$P_X = C_X(0) + \mu_X^2$$

ou no *domínio da frequência* por

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df.$$

A fórmula no domínio do tempo é comumente escrita como

$$P_X = \underbrace{\sigma_X^2}_{\text{potência AC}} + \underbrace{\mu_X^2}_{\text{potência DC}}.$$

**Demonstração:** *(fórmula no domínio do tempo)*

Tem-se que

$$\begin{aligned} P_X &= E\left[X^2(t)\right] \\ &= \operatorname{var}\left[X(t)\right] + \mu_X^2 \\ &= \operatorname{cov}\left[X(t), X(t)\right] + \mu_X^2 \\ &= C_X(0) + \mu_X^2. \end{aligned}$$

**Demonstração:** *(fórmula no domínio da frequência)*

Do teorema de Wiener−Khinchin e da definição da transformada inversa,

$$C_X(\tau) + \mu_X^2 = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} \, df.$$

Substituindo $\tau = 0$, deduz-se que

$$C_X(0) + \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \, df.$$

O resultado segue da fórmula no domínio do tempo. □

## Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que $a$, $b$ e $f_0$ são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Unif}(-\pi, \pi)$.

# Exemplo: Cosseno com fase aleatória

## Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que $a$, $b$ e $f_0$ são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Unif}(-\pi, \pi)$.

Já foi visto:

- **Média**: $\mu_X = b$
- **Função autocovariância**: $C_X(\tau) = \frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0 \tau)$

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f)$$

# Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\}$$

# Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{ C_X(\tau) + \mu_X^2 \right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{2} a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2 \right\} \end{aligned}$$

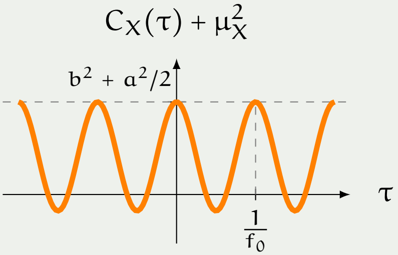
Assim, a **densidade espectral de potência** é

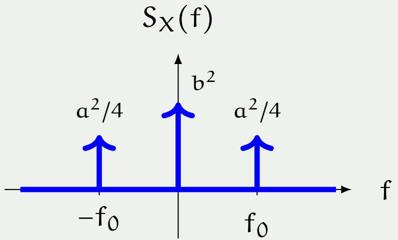
$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\ &= \tfrac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \tfrac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$

# Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade spectral de potência** é

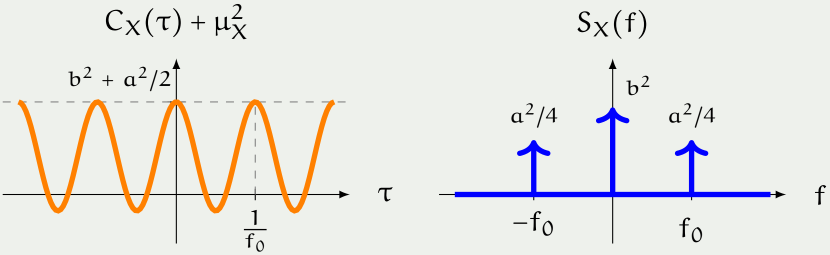
$$\begin{aligned}
S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\
&= \tfrac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \tfrac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f).
\end{aligned}$$



Assim, a **densidade espectral de potência** é

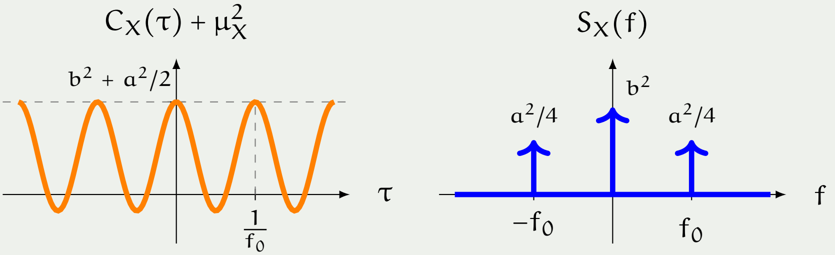
$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$




E a **potência média** é

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\
&= \frac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f).
\end{aligned}
$$




E a **potência média** é $P_X = \frac{1}{2}a^2 + b^2$.

# Exemplo: Ruído branco

## Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

# Exemplo: Ruído branco

## Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).

# Exemplo: Ruído branco

## Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.

# Exemplo: Ruído branco

## Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.
- É empregado quando o ruído é suficientemente plano na banda de interesse.

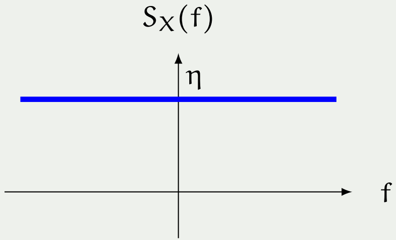
# Exemplo: Ruído branco

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

## Exemplo

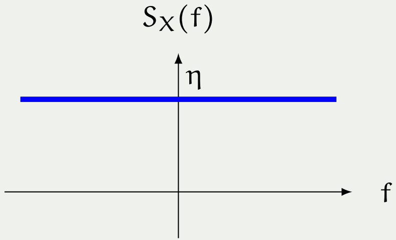
Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.



## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau)$ =

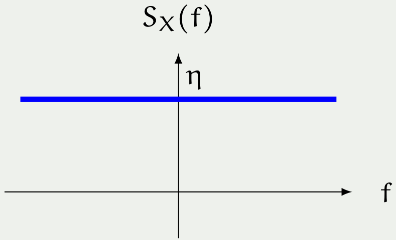


# Exemplo: Ruído branco

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} =$

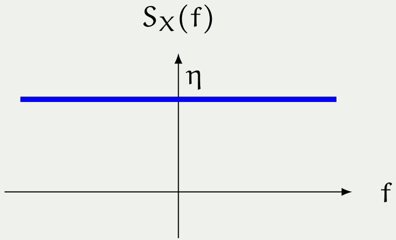


# Exemplo: Ruído branco

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} =$

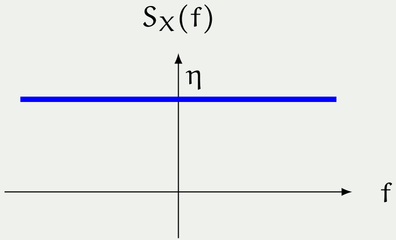


# Exemplo: Ruído branco

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

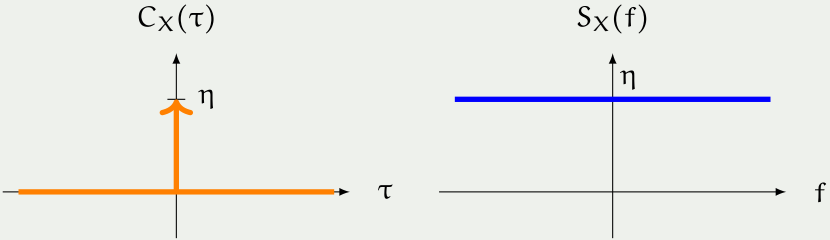
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

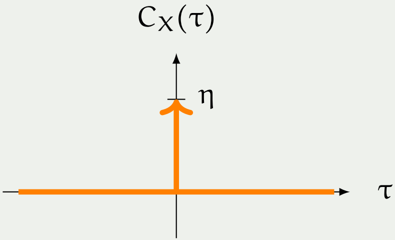
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.

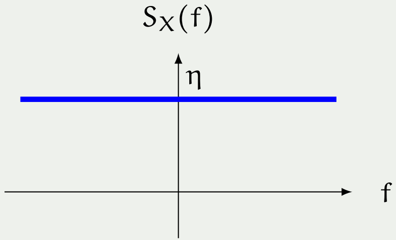


## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



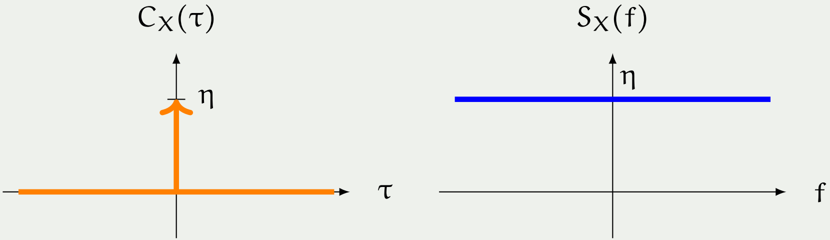




A **potência média** do ruído branco é

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.




A **potência média** do ruído branco é $P_X = \infty$.

## Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média $0$ e densidade espectral de potência

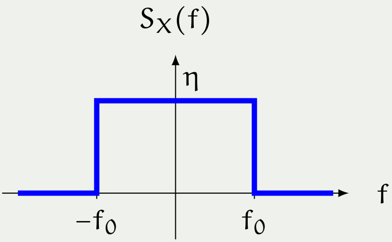
$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

# Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

## Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média $0$ e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

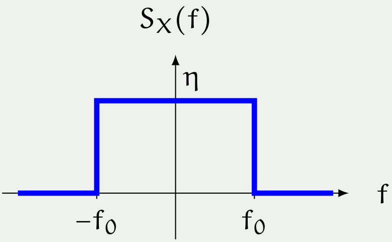



$S_X(f) =$

## Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média $0$ e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$




$$S_X(f) = \eta \, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

# Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau)$$

# Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\}$$

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \, \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\}$$

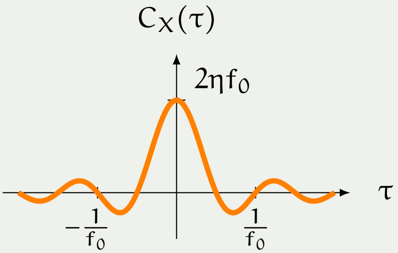
# Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

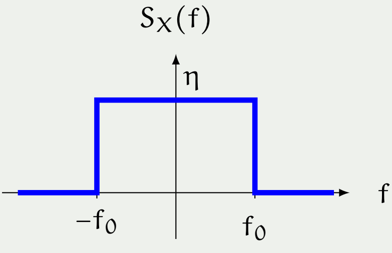
A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0\,\mathrm{sinc}\,(2f_0\tau)\,.$$

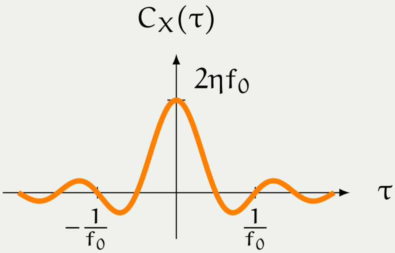


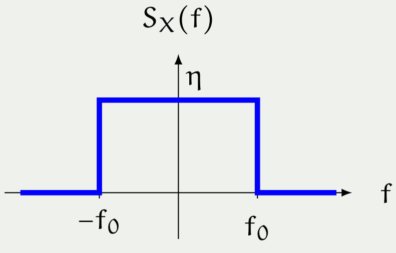



# Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$

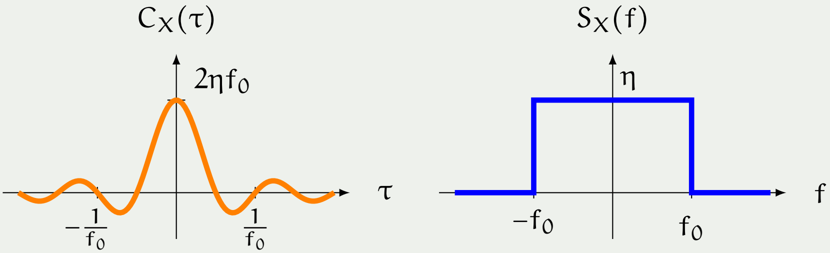



A **potência média** é

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$




A **potência média** é $P_X = 2\eta f_0$.

# Resposta de SLITs a processos ESA

## Definição

Um **sistema linear invariante no tempo** (SLIT) é um sistema $\mathcal{H}$ que possui as seguintes propriedades:

1. **Linearidade**:

$$\begin{matrix} x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_2(t) \end{matrix} \implies a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} a y_1(t) + b y_2(t)$$

2. **Invariância no tempo**:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t) \implies x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t - t_0)$$

## Teorema

Se um SLIT tem em sua entrada um sinal $x(t)$, então sua saída será dada por

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

em que $h(t)$ é a **resposta ao impulso** do sistema. Equivalentemente, no domínio da frequência:

$$\hat{y}(f) = \hat{h}(f)\,\hat{x}(f),$$

em que $\hat{h}(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a **resposta em frequência** do sistema.

# Resposta de SLITs a processos ESA

Considere a seguinte situação, em que um SLIT tem em sua entrada um processo estocástico $X(t)$ estacionário no sentido amplo.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y(t)$$

| | | |
|---|---|---|
| $\mu_X$ | | $\mu_Y$ |
| $C_X(\tau)$ | $h(t)$ | $C_Y(\tau)$ |
| $S_X(f)$ | $\hat{h}(f)$ | $S_Y(f)$ |

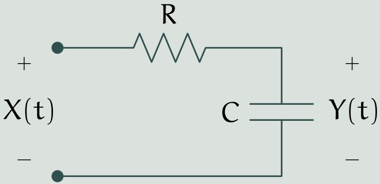
## Teorema

O processo estocástico $Y(t)$ na saída do SLIT também é ESA, com

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \hat{h}(0)\,\mu_X, \\ S_Y(f) &= \left|\hat{h}(f)\right|^2 S_X(f). \end{aligned}$$

## Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média $0$ e densidade espectral de potência $\eta$. Determine a média, a densidade espectral de potência, a função autocovariância e a potência média do sinal $Y(t)$ do circuito abaixo.



# Exemplo: Circuito RC

**Solução.** Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

# Exemplo: Circuito RC

**Solução.** Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$

**Solução.** Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$

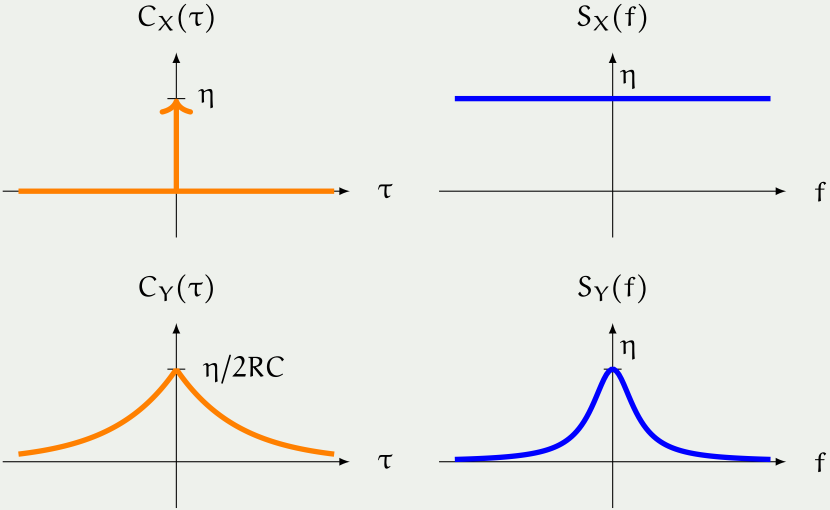
Portanto:

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= 1, \\ \left|\hat{h}(f)\right|^2 &= \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2}. \end{aligned}$$

Parâmetros do processo de saída:

$$
\begin{aligned}
\mu_Y &= \hat{h}(0)\,\mu_X = 0, \\
S_Y(f) &= \left|\hat{h}(f)\right|^2 S_X(f) = \frac{\eta}{1+(2\pi RCf)^2}, \\
C_Y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{S_Y(f)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\eta}{1+(2\pi fRC)^2}\right\} = \frac{\eta}{2RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}, \\
P_Y &= C_Y(0) + \mu_Y^2 = \frac{\eta}{2RC}.
\end{aligned}
$$

# Exemplo: Circuito RC



# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

## Exemplo

Seja $X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ uma sequência aleatória. Defina

$$Y[n] = X[n] + X[n-1].$$

Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

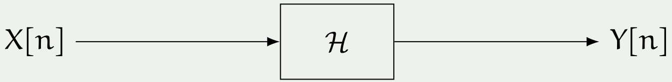
$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:




$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

**Solução.** Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \ ? \\ C_Y[\ell] &= \ ? \\ S_Y(\phi) &= \ ? \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 = \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\mathrm{Re}} \; - \; j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\mathrm{Im}}\Big|^2
\end{aligned}
$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\mathrm{Re}} \; - \; j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\mathrm{Im}}\Big|^2 \\
&= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi)
\end{aligned}
$$

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\mathrm{Re}} - j\,\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\mathrm{Im}}\Big|^2 \\
&= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\
&= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_{1}
\end{aligned}
$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\text{Re}} - j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\text{Im}}\Big|^2 \\
&= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\
&= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_{1} \\
&= 2 + 2\cos(2\pi\phi).
\end{aligned}
$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \underbrace{\hat{h}(0)}_{2}\,\mu_X = 0,$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \underbrace{\hat{h}(0)}_{2} \mu_X = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = \left|\hat{h}(\phi)\right|^2 S_X(\phi) = 2 + 2\cos(2\pi\phi),$$

# Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \underbrace{\hat{h}(0)}_{2}\,\mu_X = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = \left|\hat{h}(\phi)\right|^2 S_X(\phi) = 2 + 2\cos(2\pi\phi),$$

e a **função autocovariância** de $Y[n]$ é

$$\begin{aligned} C_Y[\ell] &= \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(\phi)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{2\} + \mathcal{F}^{-1}\{2\cos(2\pi\phi)\} \\ &= 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]. \end{aligned}$$

# Referências

# Referências


José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
***Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.***
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
***Probability and Stochastic Processes.***
Wiley, 3rd edition, 2014.